

〔研究ノート〕

流体中の近接する球に作用する潤滑力の簡易式*

永 田 裕 作**

Convenient Formula for Lubrication Force between Particles*

Yusaku NAGATA**

Department of Aerospace Engineering, School of Engineering,
Nippon Bunri University

Abstract

In this paper, a new convenient formula for lubrication force acting between two objects was derived. The equation of lubrication force acting between two disks was derived using Hele-Shaw approximation, and then the equation between two spheres was derived by introducing an approximation of the calculation range and distance. Many applications of this formula, such as motion analysis of many particles, can be expected, thanks to its simplicity.

キーワード：潤滑力，ヘレショー流れ，粒子流体間相互作用

Keywords : lubrication force, Hele-Shaw flow, interaction between particle and fluid

1. はじめに

1-1 流体中で物体は接触しない？

地球の表面は水や空気に覆われており，その中での運動はそれら流体の影響を大きく受ける。陸上を移動する人や動物は地面に足を接触し，その間に作用する摩擦力により，滑らずに歩行することができる。ところが，流体力学から考えると，その一見当たり前のように思える物体同士の接触は，実に不思議な現象に見えるのであ

る。

流体中を2つの物体が接近していく状況を，例えば考えてみよう。2つの物体が接近するということは，物体間の空間が徐々に狭くなっていくことであり，それはつまり，間にある流体が領域の外に逃げていくことに相当する。物体間の距離がかなり離れている場合には，間にある流体は容易に外に流れていくが，間隔が非常に狭くなると，流体の粘性が効きはじめて流れにくくなり，やがては流体の圧力が上昇して物体の接近を妨げる方向に作用する。この作用が有効であれば，接近する物体間に

*2022年6月13日受理

**日本文理大学工学部航空宇宙工学科 准教授

は必ず流体が存在することになり、物体同士は直接接触することはなくなってしまう。このような、接近物体間に作用する流体の効果は「潤滑効果 (Lubrication Effect)」と呼ばれ、現代的な流体力学の創始者の一人であるレイノルズにより最初に解析された。この流体による潤滑作用は、工業的に「流体潤滑」と呼ばれ、オイル軸受けなど摩擦を低減する必要のある各種製品に応用されている。

一方でこの潤滑効果は、我々が普段の生活において、手で物体を触ったりすることと、大きく矛盾しているように見える。このパラドックスに、流体力学をはじめとした物理の研究者は大いに悩まされてきた。現在その大筋の説明として、物体同士が接近すると、例えば手の皺のような物体表面の微小な凹凸や表面の静電的效果が影響するようになり、さらに非常に狭くなると流体の連続体としての性質が満たされなくなる (分子スケールになる) ため接触が実現する、というのが専門家の共通認識である (例えば Granick (1999) など)。

この潤滑効果は、微細な世界だけでなく、日常生活においても見ることができる。例えば、フローリングのような滑らかな床の上に、A4サイズの紙を落としたことがある人は、紙が床を滑るように移動するのを見たことがあるはずである。地面付近に紙が落ちててもすぐには静止せずにしばらく移動するのは、まさにこの潤滑効果によるのである。それから、液体中で接近する2つの気泡がすぐには合体して一つにならず、しばらく付着した状態を保つのも潤滑効果が関係している。

1-2 流体中の球の潤滑力

この潤滑効果は、流体中を運動するすべての物体間に作用するが、例えば固体が高速で移動し変形や破壊を伴う衝突をする場合は、衝突の効果が卓越するので潤滑効果は無視できる場合が多い。特に潤滑効果を考慮する必要があるのは、液体中での物体運動や気体中での粒子の沈着など比較的緩やかな現象でかつ物体同士が非常に接近した場合である。

潤滑効果を正確に求めるためには、対象とする複数物体間の運動に伴って流体から受ける物体表面の圧力およびせん断力を、各物体の表面全体にわたり積分すればよい。しかし、形状が複雑であったり、物体数が非常に多い場合には、潤滑効果を厳密な方法で求めるのは非常に困難である。

本論文では、半径の等しい2球および球と壁の相対運動により生じる潤滑力の実用的な式を導出することを目的とする。2球間の潤滑力が求まれば、球が多数になっ

ても重ね合わせによりすべての球についての潤滑効果を計算することができるようになる。はじめに、最も単純な場合として、2つの同一径同軸平行円板間に作用する潤滑力について導出し、その発展として2球および球と壁に作用する潤滑力の簡易式を示す。

2. 潤滑力の簡易式

2-1 平行円板間に作用する軸方向潤滑力

球の潤滑力を求めるに際し、まず平行円板間に作用する潤滑力を導出する。2つの円板の配置と座標系を図1に示す。半径 R の2つの円板のうち、下にあるものは静止し、上にある円板が中心軸下方向に運動する場合を考える。下の円板の上面の中心に原点を取り、面に沿った方向の座標を r 、中心軸上方向の座標を h とする。そして上にある円板の下面の h 座標の値を H とする。(この図では、座標系を示すために円板間の距離が大きく開いているが、潤滑力が作用する範囲は $H \ll R$ であり、実際は非常に狭い。)

次に、この円板を取り巻く流体の粘性率を μ 、周囲の圧力をゼロとし、円板間の領域の流れについて、

①流速 U は、 h 方向に一樣

②流速 U は、 r 方向のみに依存し、周方向は一樣
という2つの仮定を置くこととする。①は円板間の距離 H が円板半径 R に対して非常に狭い場合 ($H \ll R$) に成り立つ近似であり「Hele-Shaw 近似」と呼ばれている。②は、非常に緩やかな流れに対して、対称性から成り立つものである。

①と②の仮定から、この流れは、位置 r における圧力を P として、以下のように表すことができる。

$$U(r) = -\frac{H^2}{12\mu} \frac{dP}{dr} \quad (1)$$

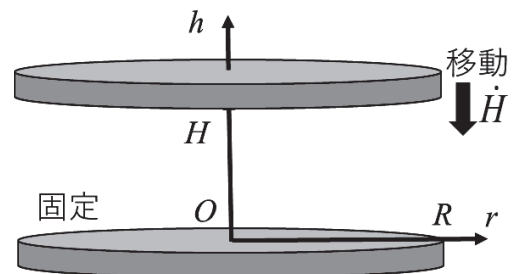


図1：2円板間の潤滑力計算に用いる座標系

そして、円板の移動領域と円板間の流体が流出する体積が等しい（体積保存）から、以下の式が成り立つ。

$$-\pi r^2 \dot{H} = 2\pi r H U(r) \quad (2)$$

ここで $\dot{H}$ は、円板位置の時間微分つまり円板の移動速度を表している。

これらを整理し積分することにより、圧力を求めることができる。（円板の外の圧力をゼロとしている）

$$P(r) = \int_r^R 6\mu \frac{\dot{H}}{H^3} r dr = 3\mu \frac{\dot{H}}{H^3} (R^2 - r^2) \quad (3)$$

そして、円板の面上で圧力を積分することにより、この場合に生じる潤滑力を求めることができる。

$$F_L = \int_0^R 2\pi r P(r) dr = -\frac{3}{2} \pi \mu \frac{\dot{H}}{H^3} R^4 \quad (4)$$

2-2 2つの球間に作用する中心軸方向潤滑力

半径が a の2つの球の間に作用する潤滑力について考える。基本的な導出過程は円板の場合と同様であるが、球の場合は2球間の距離が半径方向でみていくと大きく変化する（図2a）。例えば円板の潤滑力の式（4）を見れば、間隙の距離 H のマイナス3乗に比例している。このことから、球の場合においては、最近接領域付近が潤滑力のほとんどの割合を占めることが予想される。ここでの目的は球間に作用する潤滑力の簡易式を求めることであるので、球間の最近接領域の範囲で潤滑力を求めることとする。この範囲は、2球間の最近接距離 H と球の半径 a に関係するとして、後の計算の便宜も考え、単純に両者の相乗平均をとるものとする。これは $R \ll a$ においては合理的である（図2b）。

そして、2つの球の配置と座標系を図3に示す。半径 a の2つの球のうち、下にあるものは静止し、上にある球が中心軸下方向に運動する場合を考える。下の球の上面の2球の最近接位置に原点を取り、中心軸上方向の座標を h 、中心軸に直交する方向の座標を r とする。そして、上にある球の最近接位置の h 座標の値を H とする。それから、潤滑力算出の r 方向の範囲を R とし、それは先にも述べたように相乗平均

$$R = \sqrt{aH} \quad (5)$$

とする。

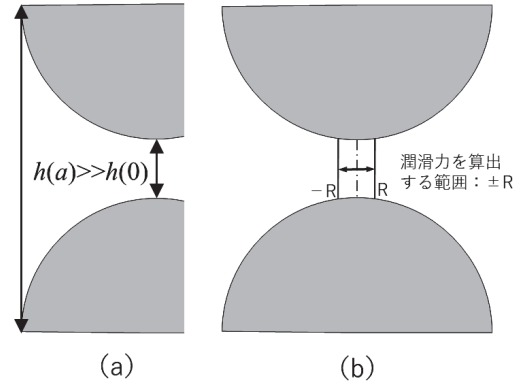


図2：近接する2球間の距離の違いと計算範囲

(a) 計測位置による距離の違い

(b) 潤滑力算出に用いる範囲

そして、この球を取り巻く流体の粘性率を μ 、周囲の圧力をゼロとし、球間の領域の流れについて円板の場合と同様に、

①流速 U は、 h 方向に一樣

②流速 U は、 r 方向のみに依存し、周方向は一樣という2つの仮定を置くこととする。

すると、①と②の仮定から表される式は、円板の場合と全く同じで、以下のように表すことができる。

$$U(r) = -\frac{[h(r)]^2}{12\mu} \frac{dP}{dr} \quad (6)$$

$$-\pi r^2 \dot{H} = 2\pi r h(r) U(r) \quad (7)$$

ここで注意すべきことは、円板の場合は r 方向に一樣であった物体間距離 h （円板の場合は H ）が、球の場合には r の関数となっていることである。この場合は球であるため、 h と r の関係は容易に導くことができ、

$$h(r) = H + 2a - 2\sqrt{a^2 - r^2} \quad (8)$$

である。

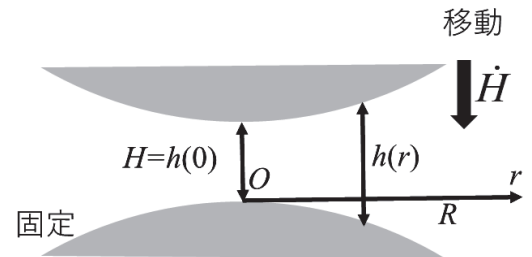


図3：2球間の潤滑力計算に用いる座標系

そして、今回の場合は簡易式の導出であり、球の半径 a は距離 H に対して十分大きく ($H \ll a$) 最近接点付近の狭い領域 $\pm R$ での計算であるため、式 (8) に対して二項近似を適用した式 (9) を用いることとする。

$$h(r) \approx H + \frac{r^2}{a} \quad (9)$$

これらの式 (6), (7) および (9) から積分により圧力を求めることができる。(円板の場合と同様、外の領域の圧力をゼロとしている)

$$\begin{aligned} P(r) &= \int_r^R 6\mu \frac{\dot{H}}{[h(r)]^3} r dr \\ &= \frac{3}{2} \mu \dot{H} a \left((4H^2)^{-1} - \left(H + \frac{r^2}{a} \right)^{-2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

そして、球表面上で圧力を積分することにより、この場合に生じる潤滑力を求めることができる。

$$F_L = \int_0^R 2\pi r P(r) dr = -\frac{3}{8} \pi \mu \frac{\dot{H}}{H} a^2 \quad (11)$$

2-3 球と壁の間に作用する鉛直方向潤滑力

底面や容器の中に入った粒子を扱う場合には、壁との間の潤滑力を考慮する必要がある。この場合は、球と壁との間の距離 h を以下のようにすればよい。

$$h(r) = H + a - \sqrt{a^2 - r^2} \approx H + \frac{r^2}{2a} \quad (12)$$

そして2球の場合と同様に計算することで、以下の式が得られる。

$$F_L = -\frac{2}{3} \pi \mu \frac{\dot{H}}{H} a^2 \quad (13)$$

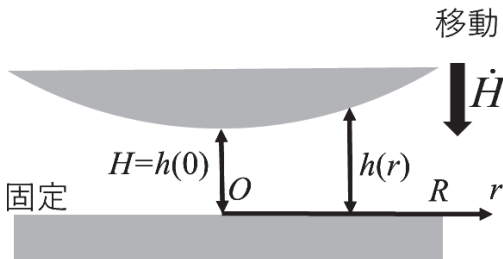


図4：球と壁の間の潤滑力計算に用いる座標系

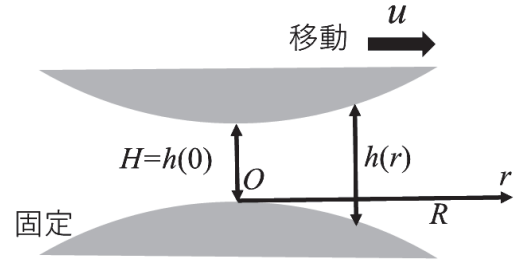


図5：2球間の接方向の潤滑力計算に用いる座標系

2-4 2つの球間に作用する接方向潤滑力

次に、2つの球が中心軸に対して垂直な方向に速度 u で運動する場合の潤滑力について考える。この場合は、ニュートンの粘性法則により、球表面に作用するせん断力 τ は

$$\tau(r) = \mu \frac{u}{h(r)} \approx \mu \frac{u}{\left(H + \frac{r^2}{a} \right)} \quad (14)$$

となる（距離 h に二項近似を適用）。

この式を、対象とする表面範囲で積分することにより、接方向の潤滑力を求めることができる。

$$F_T = \int_0^R 2\pi r \tau(r) dr = -\pi \mu u a \ln 2 \quad (15)$$

2-5 球と壁の間に作用する接方向潤滑力

そして、球と壁の間に作用する接方向潤滑力は、距離 h を2-3と同様に変えればよい。

$$\tau(r) = \mu \frac{u}{h(r)} \approx \mu \frac{u}{\left(H + \frac{r^2}{2a} \right)} \quad (16)$$

これを表面について積分することで、以下の式が得られる。

$$F_T = \int_0^R 2\pi r \tau(r) dr = -2\pi \mu u a \ln 1.5 \quad (17)$$

2-6 潤滑力の簡易式のまとめ

これまでの結果を、以下にまとめる。

① 2球間に作用する潤滑力

・ 中心軸方向

$$F_L = -\frac{3}{8}\pi\mu\frac{\dot{H}}{H}a^2 \quad (11)$$

・ 接線方向

$$F_T = -\pi\mu a \ln 2 \quad (15)$$

② 球と壁の間に作用する潤滑力

・ 中心軸方向

$$F_L = -\frac{2}{3}\pi\mu\frac{\dot{H}}{H}a^2 \quad (13)$$

・ 接線方向

$$F_T = -2\pi\mu a \ln 1.5 \quad (17)$$

3. おわりに

本論文では、2つの物体（2円板、2球、球と壁）に作用する潤滑力について、物体間の相対運動による簡易式を導出した。潤滑力は、本来は物体まわりの流体運動及び物体運動を計算した上で、物体表面に作用する流体力（圧力およびせん断力）を表面全体にわたって積分することにより求められるものである。そのため、例えば粒子集団の干渉沈降のような非常に多数の粒子が関係するような現象の解析に対しては、潤滑力の正確な導入は困難であった。本論文で導出した簡易式を用いれば、物体の相対運動が分かれば潤滑力を求めることができ、多数の粒子運動を扱う場合でも容易に導入することができる。

また、本論文のような相対運動から潤滑力を求めるアプローチにおいても、より正確な式を導出することは可能であるが、非常に複雑な表式となる。本論文の方法では

・ 積分範囲を球半径と距離との相乗平均に限定

・ 流体に対する Hele-Shaw 近似

・ 距離の二項近似

という3つの合理的な近似を導入することで、正確さを大きく犠牲にすることなく短い平易な式にすることができた。

本論文の潤滑力の式では、分母に距離が入っており、接触した状態では潤滑力は無限大となる（「はじめに」で述べたパラドックス）。粒子集団運動の数値解析に本式を導入する場合には、例えば物体間距離がある範囲よりも小さくなった場合には一定値になるようにするなど、無限大を回避する工夫が必要である。

潤滑力簡易式の応用としては、流体中の粒子運動の数値解析に組み込んで実現象に近づけることが、まず挙げられる。それから氷上のスポーツであるカーリングでは、競技が行われる氷面は、粒状の氷が撒かれて表面が形成されている。この氷粒を粒子とみなして復氷の原理により液膜が氷粒子とカーリングストーン底面間にあるならば、壁と粒子の潤滑式がこの問題に応用できる可能性がある。従来より容易に潤滑力を導入できるようにするため、その他にも非常に多様な用途が期待できる。

参考文献

Granick, S. (1999). "Soft Matter in a Tight Spot". *Physics Today*. 52 (7): 26-31.

Reynolds, O. (1886). "On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 177: 157-234.

Hele-Shaw, H. S. (1898). "The Flow of Water". *Nature*. 58 (1489): 34-36

フリードランダー (1983) 『エアロゾルの科学』 産業図書