

〔研究ノート〕

周期信号のパラメータを求める

福島 学*, 徳富 響*², 宮田 叶斗*²

*日本文理大学工学部情報メディア学科

*²日本文理大学大学院工学研究科環境情報学専攻

Analysis Method for Periodical Time Waveforms

Manabu FUKUSHIMA*, Hibiki TOKUTOMI*², Kanato MIYATA*²

*Department of Media Technologies, School of Engineering, Nippon Bunri University

*²Department of Environmental Engineering and Applied Information Science,
Graduate School of Engineering, Nippon Bunri University

キーワード：時間波形, 周期, 推定, スペクトル

Keywords : time waveform, period, estimation, spectrum

1. はじめに

物理現象の多くは周期で繰り返す周期性を持つものがある。この周期を求めることが現象のモデル化の一歩であり、数式記述することで、対象の1次性質記述となる。このモデル化により、対象を制御するためのデジタルツインを可能とする。デジタルツインは機械系だけでなく、モデルが複雑ではあるが人の感性を対象と捉げることでメタバースにおけるサービスやデジタルヒューマンへの展開につながっている。

時間経過に伴う現象をセンサ等により数値化する行為をサンプリングといい、観測値で形成される数列を離散時間波形という。この離散数列から連続関数を推定することで現象の原因分析や予測分析を行うという外挿や、サンプル間隔の内挿補完を行うことができる。これは、理学における現象の解明だけでなく、工学における工業製品やサービスまたはCyber世界にPhysical世界を投影するうえで重要である。

本稿では、周期関数の代表として正弦波の性質から、周期解析としてフーリエ変換について実際にグラフを描

くプログラムにある数式を変更しながら考える。

2. 正弦波の性質

正弦波 ($\sin x$) は、図1実線で示す通り x (π rad) が0から2に変化する時、 $\sin x$ の計算結果 (以下、振幅と呼ぶ) が0から1そして0になり-1へと変化し再び0に戻る。図には x が0から2の範囲しか示していないが、 x がいかに変化しても常にそれを繰り返すため周期信号と呼ばれる。 x を時刻とみれば数学的に x は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化させることができるため、これが何らかの物理現象のモデルであるならば数学的には過去も未来も計算することができることを表している。

ここで $\sin(x - y)$ として、 $y = 0, 1/8, 2/8, 3/8$ とすると、図1に示すように時間波形が変化する。 y の値が増えることにより正弦波の+1が現れる x の値が変化している。これは、 $\sin x$ で振幅が1となる時 $x = 1/2$ (π rad) であるが、 $y = 1/8$ では $x - y = 1/2$ でなければならない。この条件を満たすには $x = 1/2 + 1/8 = 4/8 + 1/8 = 5/8$ となり、横軸に示す x が $5/8$ (π rad) すなわち、 $x - y = 5/8 - 1/8 = 4/8 = 1/2$ となり振幅が1となる。こ

これは y だけ x が大きな数値にならないければならないことを意味する。言い換えると、 x を時間と捉えたと $x - y$ は x だけに比べて y だけ時間波形が出てくるのに時間がかかっているすなわち「遅れた」とみることができる。 x が距離であれば y だけ先に進んだことになる。これらのことから、 x にどんな意味を持たせるかでその意味が変わることを意味する。数学的には $\sin \theta$ における θ が変化し直角三角形の形を意味する。

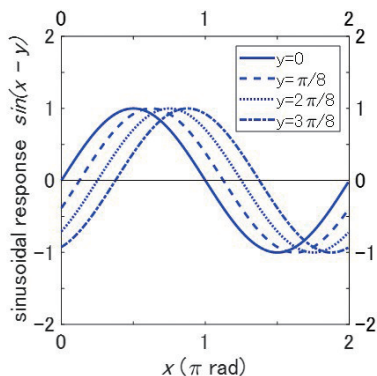


図1 正弦波 $\sin(x-y)$ の y による図形の違い

図1を描画するための、Google Colaboratory で動作するように作成した Python プログラムを付録に記載する。これから出てくる図面を実際に自分で描画し、パラメータを変えながら「計算」が「手順」ではなく「意味」が書かれていることを確認するとともに「意味」を理解することを目的として値を変化させることで「数字が持つ意味」を理解するためのステップが踏めると考えている。同様の目的でいくつかの図を描画するプログラムを付録に記載する。

正弦波 $\sin x$ と余弦波 $\cos x$ の関係を考えると、 $\sin(x(\pi \text{ rad}) - 1/2(\pi \text{ rad})) = \cos(x)$ であるが、 $\sin x$ の微分が $\cos x$ となる。それを図2に示す。これは、正弦波を微分するという計算が $y = 1/2(\pi \text{ rad})$ の変化を意味している。すなわち、余弦波を積分すると正弦波となり、両者が微分・積分においても対をなすことがわかる。

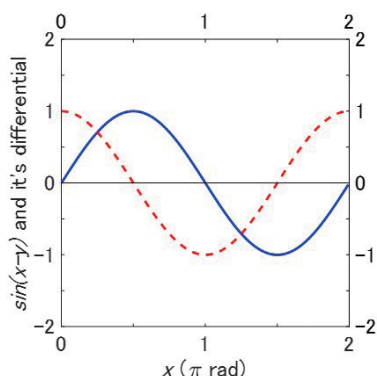


図2 正弦波 $\sin x$ とその微分波形

ここで、正弦波を縦軸、余弦波を横軸に取り、 x を 0 から $2(\pi \text{ rad})$ に変化させると、その軌跡は図3に示す様に真円となる。これは図2から、正弦波が0の時に余弦波が1または-1となり、正弦波が1または-1の時に余弦波が0となっており、これらが図3の円の四方と対応し、図2の横軸 $x=0$ が横軸の1となり、 x が大きくなるにつれて点が反時計回りに進むことが想像できる。これを確認するために、図3を3次元プロットしたものが図4である。図4において、 x の軸が奥行方向になるようにプロットしたのが図3であり、横軸を x とし残りの軸のグラフを重ねたものが図2となる。

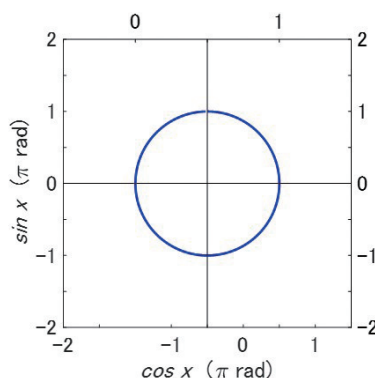


図3 縦軸を $\sin x$ とし横軸を $\sin'(x) = \sin(x+1/2) = \cos x$ とし $x=0$ から $2(\pi \text{ rad})$ に変化させた図 ($\sin'$ は $\sin$ の微分)

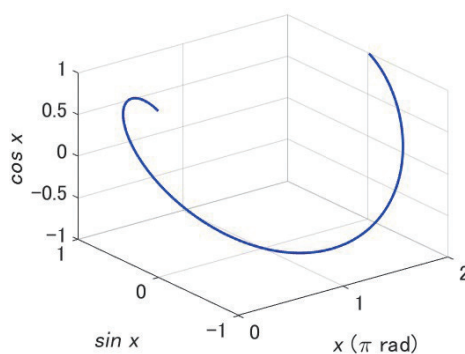


図4 図3において x とプロット点の対応

ここで、図3に示した真円を考えると、原点から円周の1点までに矢印（ベクトル）を描くと、 x が0から2まで変化したときのベクトルの和が原点すなわち、横軸方向および縦軸方向の和が0となることを示している。これは、正弦波 $\sin x$ において、 $x=0$ から $2(\pi \text{ rad})$ を積分するとその結果が0となり、さらに $\sin(x-y)$ でもその性質すなわち $x-y=0$ から2を積分するとその結果が0となることを示している。

ここで特に重要な点は $x = 0$ から $2(\pi \text{ rad})$ の変化すなわち、図4において「1回転」であることが必須条件であり、図3において円に「重なり」がある場合、積分した結果が0とならないことを意味している。

次に周期を考えるため、時間波形 $f(x) = \sin(x - y)$ としたときを考える。 $x = 0$ から2に対して、 $f(x) = \sin(2x - y)$ となると、図4において回転が2回となる。すなわち、 x が0から2となる時間が1秒とすると、1回転で1 (cycle/second) = 1 (Hz) であり、 $\sin(2x - y)$ は同じ x の変化で2回転すなわち、2 (cycle/second) = 2 (Hz) となる。

この条件であっても原点を起点とする円周までのベクトルの和は変化がないことから積分した結果が0となることがわかる。

ここで、振幅 A で x に同一係数 f が積算された一般式を考えるとそれは

$$f(x) = A \sin(fx - y) \quad (1)$$

となり、

$$\int f(x) dx = 0, \text{ where } x = 0 \text{ to } 2(\pi \text{ rad}) \quad (2)$$

すなわち周期信号 $f(x)$ は、振幅 A 、周波数 f 、位相 y 、の3種類で記述できることとなる。逆に、周期信号の分析とは、この3つのパラメータを求めることとなる。

3. 周期信号分析

まず初めに、振幅 A を求める方法を考える。計算機は限りなく0にすることや無限を扱うことが難しい。このため、必要なデータだけが得られるように「計算を工夫」する。ここでは、周期信号に対してどのような計算をすれば欲しいデータである振幅 A が求められるかを考える。

三角関数で使える「計算の工夫」として、ここでオイラーの公式を考える。この公式は

$$\exp(-ix) = \cos(x) - i \sin(x) \quad (3)$$

であり、これを使うと

$$\begin{aligned} \exp(-i(\alpha + \beta)) &= \cos(\alpha + \beta) - i \sin(\alpha + \beta) \\ &= \exp(-i\alpha) \exp(-i\beta) \\ &= \{\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)\} \\ &\quad \{\cos(\beta) - i \sin(\beta)\} \\ &= \{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\} \\ &\quad -i\{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\} \end{aligned}$$

より、加法定理が出ていることがわかる。すなわち、三

角関数同士の積算がわかり、その結果に2つの周期の和と差が出てくることがわかる。すなわち、 $\cos(\alpha - \beta)$ があれば、 $\alpha = \beta$ の時、 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(0) = 1$ となり、三角関数以外に変えることができる。例えば

$$\begin{aligned} \sin(x)\sin(x) &= \{\cos(x - x) - \cos(x + x)\}/2 \\ &= \{1 - \cos(2x)\}/2 \\ &= 0.5 - 0.5 \cos(2x) \end{aligned} \quad (4)$$

となり、式(4)右辺第2項は $x = 0$ から2の積分で0となり、第1項が $-0.5 \cdot 2 = -1$ となる。すなわち係数 A は

$$A = 2 \int \sin(x) \exp(-ix) dx = -i \quad (5)$$

となり、式(1)の A が求められる。ここで

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}/2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\}/2 \end{aligned} \quad (7)$$

となり、式(4)に示す定数 (x で変化しない値) が存在しない。すなわち、 $A = 0 - i0$ となる。

これを一般化すると

$$\begin{aligned} A_f &= 2 \int f(x) g_f(x) dx \\ &\quad , \text{ where } x = 0 \text{ to } 2(\pi \text{ rad}), \\ g_f(x) &= \exp(-i(fx)), \end{aligned} \quad (8)$$

で求められる。これをフーリエ変換という。式(8)からわかるように、予め用意した $g_f(x)$ から係数 A_f を求めている。また式(8)からわかるように、積分区間が0から2 ($\pi \text{ rad}$) であることが前提の式である。

まずは式(8)を確かめるために、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(2x - y) \\ &\quad , \text{ where } y = 0(\pi \text{ rad}) \end{aligned} \quad (9)$$

を図5左列1段目に示す。図5は、2段目に1周期、3段目に2周期、4段目に3周期の、左列に $\cos$ 、右列に $\sin$ を左列1段目に示した波形との積算結果を点線で示している。なお、積算する波形は破線で示している。

図5から、左列1段目の波形と積算した波形が一致している右列下から2段目が $\text{sum} = 1$ となっており、それ以外が0となっていることから式(8)で係数 A が求められることが分かった。また周期分析は「予め用意した周期」すなわち「周期の記述には限界がある」ことを意味している。これを周期分解能または周波数分解能という。必要な周波数の係数 A を求めるには、その周期に応じた波形が必要、すなわち低い周波数を分析するには

長い周期を用意しなければならないことがわかる。これは、時間的な変化を見る上でどれだけ短時間の変化を知りたいかに関する時間分解能を下げることを意味している。このように、時間分解能と周波数分解能はトレードオフの関係である。

次に、図6に $y=1/4(\pi \text{ rad})$ の結果を示す。図5と比較すると、左列1段目に示す波形が変わっていることがわかる。

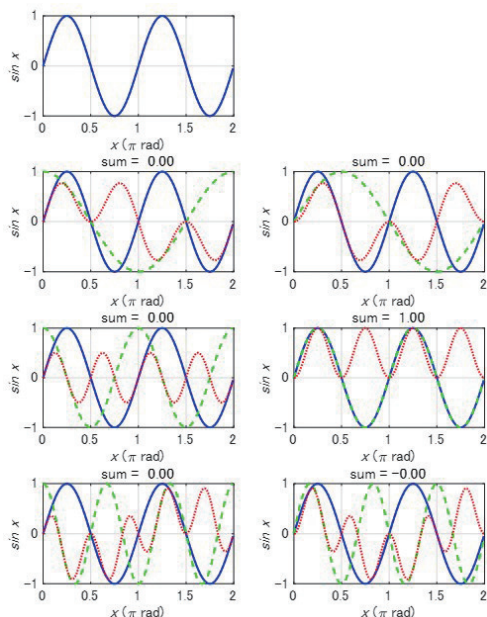


図5 $\sin(2x)$ (左列1段目) に余弦波 (左列) と正弦波 (右列) に1周期 (2段目) 2周期 (3段目) 3周期 (4段目) を積算した時の面積 (図の上に「sum=」に続けて表示) を求めた結果

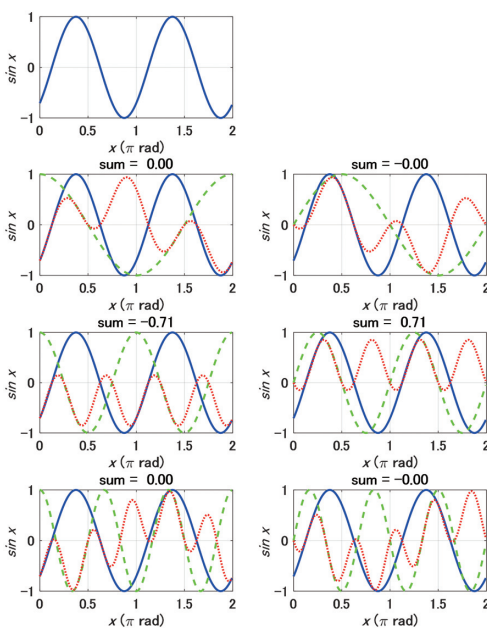


図6 $\sin(x-y)$ において $y=1/4(\pi \text{ rad})$ とした時

図5は右列下から2段目に1と出ており、振幅 $A=0-i1$ であることがわかる。図6は下から2段目の左右に同じ数値が出ており、これは $1/\sqrt{2}$ である。図3でこの値を考えると、図7に示す破線を斜辺とする2等辺三角形すなわち、 $\theta=1/4(\pi \text{ rad})$ である。すなわち、図6の係数 $A=1/\sqrt{2}-i(1/\sqrt{2})$ から θ を求めることで位相 y が求められる。

以上により、周期信号 $f(x)$ の性質、振幅 A 、周波数 f 、位相 y が求まることがわかった。

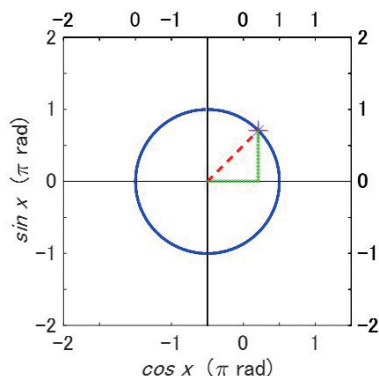


図7 $\sin(x-y)$, where $y=1/4(\pi \text{ rad})$ の位置 (+印) とその時の $\cos x$ および $\sin x$ の関係

4. おわりに

本稿では、1) 周期信号が 振幅 A 周波数 f 位相 y によって記述されること、2.1) 予め用意した周期信号を積算し和を求めることで振幅 A が求まる、2.2) どこで A が求まるかから周波数 f が求まる、2.3) A の実数と虚数から位相 y が求まる、ことをグラフに基づいて確認した。

主要な図面のプログラムにおいてパラメータを変えることで数式や考えた各プロセスが持つ意味を理解することができたと考える。

【図1のプログラム・Python】

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# パラメータの設定
N = 2**8
x = np.linspace(0, 2, N, endpoint=False)

# 描画準備
plt.figure()
line_styles = ['-', '--', ':', '-.']
count = 0

#  $\sin((x * \pi) - y * \pi)$  のプロット
for y in np.arange(0, 1/8 * 4, 1/8):
    fy = np.sin(x * np.pi - y * np.pi)
    plt.plot(x, fy, 'b' + line_styles[count], linewidth=2)
    count += 1

# x 軸に  $y=0$  を示す線をプロット
plt.plot([0, 2], [0, 0], 'k')

# 凡例を追加
plt.legend(['y=0', 'y= $\pi/8$ ', 'y= $2\pi/8$ ', 'y= $3\pi/8$ '], loc='best')

# 軸の設定
plt.xlim([0, 2])
plt.ylim([-2, 2])
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')

# ラベルの設定
plt.xlabel(r'$\pi x / \pi$ (rad)', fontsize=18)
plt.ylabel(r'sinusoidal response $\sin(\pi x / \pi)$', fontsize=18)

# x 軸の目盛り設定
plt.xticks([0, 1/2, 1, 3/2, 2], ['0', '1', '2'], fontsize=18)

```

```

# y 軸の目盛り設定
plt.yticks(np.arange(-2, 2.5, 0.5), ['-2', '-1', '0', '1', '2'],
           fontsize=18)

# 2 つ目の軸を追加 (右 y 軸と上 x 軸)
ax2 = plt.gca().twinx() # 右側の y 軸
ax2.spines['right'].set_position(('outward', 0)) # 右側に配置
ax2.set_ylim([-2, 2])
ax2.set_yticks(np.arange(-2, 2.5, 0.5))
ax2.set_yticklabels(['-2', '-1', '0', '1', '2'], fontsize=18)

ax3 = plt.gca().twinx() # 上側の x 軸
ax3.spines['top'].set_position(('outward', 0)) # 上側に配置
ax3.set_xlim([0, 2])
ax3.set_xticks([0, 1/2, 1, 3/2, 2])
ax3.set_xticklabels(['0', '1', '2'], fontsize=18)

# 軸の縦横比を正方形に設定
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
ax2.set_aspect('equal', adjustable='box')
ax3.set_aspect('equal', adjustable='box')

# グラフを表示
plt.show()

```

【図4のプログラム・Python】

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# パラメータ設定
N = 2**8
x = np.linspace(0, 2 - (2 / N), N) # x の範囲を生成
LineStylePat = ['-', '--', ':', '-.']

```

$y=0$ の場合の sin 曲線

$y1 = 0$

$fys = \sin(x * \pi) - (y1 * \pi)$

$y=-1/2$ の場合の sin 曲線

$y2 = -0.5$

$fyc = \sin(x * \pi) - (y2 * \pi)$

プロット設定

$fig = \text{plt.figure}()$

$ax = fig.add_subplot(111, \text{projection}='3d')$

3D プロット

$ax.plot(x, fys, fyc, \text{LineStylePat}[0], \text{color}='b', \text{linewidth}=2)$

グリッドとラベルの設定

$ax.grid(\text{True})$

$ax.set_xlabel(r'\$x\$ (rad)\$', \text{fontsize}=18)$

$ax.set_ylabel(r'\$y\$ (sin(x))\$', \text{fontsize}=18)$

$ax.set_zlabel(r'\$z\$ (cos(x))\$', \text{fontsize}=18)$

フォントサイズの設定

$ax.tick_params(\text{axis}='both', \text{which}='major', \text{labelsize}=18)$

グラフの表示

$\text{plt.show}()$

【図5のプログラム・Python】

$\text{import numpy as np}$

$\text{import matplotlib.pyplot as plt}$

パラメータ設定

$N = 2 * 8$

$x = \text{np.linspace}(0, 2 - (2 / N), N)$ # x の範囲を生成

$\text{LineStylePat} = ['-', '--', ':', '-.']$

$y = 0$ # y の設定

$k = 2$

$y=0$ で $k=2$ のときの sin 波

$fys = \sin(k * (x * \pi) - (y * \pi))$

プロット設定

$fig, \text{axs} = \text{plt.subplots}(4, 2, \text{figsize}=(8, 12))$ # サブプロットを 4×2 で作成

$\text{fig.subplots_adjust}(\text{hspace}=0.5, \text{wspace}=0.3)$ # サブプロット間のスペース調整

最初のプロット (subplot 1,1)

$\text{axs}[0, 0].plot(x, fys, \text{LineStylePat}[0], \text{color}='b', \text{linewidth}=2)$

$\text{axs}[0, 0].grid(\text{True})$

$\text{axs}[0, 0].set_xlabel(r'\$x\$ (rad)\$', \text{fontsize}=14)$

$\text{axs}[0, 0].set_ylabel(r'\$y\$ (sin(x))\$', \text{fontsize}=14)$

$\text{axs}[0, 0].tick_params(\text{axis}='both', \text{which}='major', \text{labelsize}=14)$

ループでサブプロットを作成

for loop in range(1, 4):

 # cos と sin の波形を計算

$fc = \cos(\text{loop} * (x * \pi))$

$fs = \sin(\text{loop} * (x * \pi))$

 # cos 波との演算 (subplot 2,1, 3,1, 4,1)

$\text{axs}[\text{loop}, 0].plot(x, fys, \text{LineStylePat}[0], \text{color}='b',$

$\text{linewidth}=2, \text{label}='sin(x)')$

$\text{axs}[\text{loop}, 0].plot(x, fc, \text{LineStylePat}[1], \text{color}='g',$

$\text{linewidth}=2, \text{label}='cos(x)')$

$\text{axs}[\text{loop}, 0].plot(x, fc * fys, \text{LineStylePat}[2], \text{color}='r',$

$\text{linewidth}=2, \text{label}='cos(x)*sin(x)')$

$\text{axs}[\text{loop}, 0].grid(\text{True})$

$\text{axs}[\text{loop}, 0].set_xlabel(r'\$x\$ (rad)\$', \text{fontsize}=14)$

$\text{fontsize}=14)$

$\text{axs}[\text{loop}, 0].set_ylabel(r'\$y\$ (sin(x))\$', \text{fontsize}=14)$

$\text{axs}[\text{loop}, 0].tick_params(\text{axis}='both', \text{which}='major',$

$\text{labelsize}=14)$

$\text{axs}[\text{loop}, 0].set_title(f'sum = \{np.sum(fc * fys) / (N /$

```

2):.2f}')
    axs[loop, 0].legend()

    # sin 波との演算 (subplot 2,2, 3,2, 4,2)
    axs[loop, 1].plot(x, fys, LineStylePat[0], color='b',
linewidth=2, label='sin(x)')
    axs[loop, 1].plot(x, fs, LineStylePat[1], color='g',
linewidth=2, label='sin(x)')
    axs[loop, 1].plot(x, fs * fys, LineStylePat[2], color='r',
linewidth=2, label='sin(x)*sin(x)')
    axs[loop, 1].grid(True)
    axs[loop, 1].set_xlabel(r'$\pi x / m \pi$ ($\pi$ rad)$',
fontsize=14)
    axs[loop, 1].set_ylabel(r'$\sin(x)$', fontsize=14)
    axs[loop, 1].tick_params(axis='both', which='major',
labels=14)
    axs[loop, 1].set_title(f'sum = {np.sum(fs * fys) / (N /
2):.2f}')
    axs[loop, 1].legend()

# グラフの表示
plt.show()

```

【図 7 のプログラム・Python】

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# パラメータ設定
N = 2**8
x = np.linspace(0, 2 - (2 / N), N) # x の範囲を生成
LineStylePat = ['- ', '-.-', '!', '-.']

# sin 波の計算
y = 0
fys = np.sin((x * np.pi) - (y * np.pi))
y = -1 / 2

```

```

fyc = np.sin((x * np.pi) - (y * np.pi))

# プロットの設定
plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(fys, fyc, LineStylePat[0], color='b', linewidth=2,
label='sin(x) vs sin(x -  $\pi/2$ )')

# 基準線の描画
plt.plot([-2, 2], [0, 0], 'k') # x 軸
plt.plot([0, 0], [-2, 2], 'k') # y 軸

# 特徴点と補助線の描画
sqrt_half = 1 / np.sqrt(2)
plt.plot(sqrt_half, sqrt_half, '+', markersize=16, color='black')
plt.plot([0, sqrt_half], [0, sqrt_half], 'r--', linewidth=2)
plt.plot([sqrt_half, sqrt_half], [0, sqrt_half], 'g-', linewidth=2)
plt.plot([0, sqrt_half], [0, 0], 'g-', linewidth=2)

# 軸の設定
plt.axis([-2, 2, -2, 2])
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.xlabel(r'$\pi \cos(x) / m \pi$ ($\pi$ rad)$', fontsize=18)
plt.ylabel(r'$\sin(x) / m \pi$ ($\pi$ rad)$', fontsize=18)

```

```

# x 軸と y 軸の目盛り
plt.xticks(ticks=np.arange(-2, 2.5, 0.5), labels=['-2', '-', '-1', '0', '1', '2'])
plt.yticks(ticks=np.arange(-2, 2.5, 0.5), labels=['-2', '-', '-1', '0', '1', '2'])

# フォントサイズ設定
plt.tick_params(axis='both', which='major', labels=18)

# 右側と上側の補助軸を追加
ax2 = plt.gca().twinx()
ax2.set_yticks(np.arange(-2, 2.5, 0.5))
ax2.set_yticklabels(['-2', '-', '-1', '0', '1', '2'])

```

```
ax2.tick_params(axis='y', labelsize=18)

ax3 = plt.gca().twinx()
ax3.set_xticks(np.arange(-2, 2.5, 0.5))
ax3.set_xticklabels(['-2', '-', '-1', '0', '1', '2'])
ax3.tick_params(axis='x', labelsize=18)

# グラフの表示
plt.grid(True)
plt.show()
```

(2024年11月11日 受理)