

〔研究ノート〕

NBU GEN-HEL の開発 (第1報)

— ブレード運動の数学モデル —

大城 鳳花*, 中山 周一*²

*日本文理大学工学部航空宇宙工学科 (2024年度卒業)

*²日本文理大学工学部航空宇宙工学科

Helicopter Rotor Simulation Program NBU GEN-HEL Development (1st Report)

— Rotor Dynamics Model —

Fuka OSHIRO*, Shuichi NAKAYAMA*²

*Department of Aerospace Engineering, School of Engineering, Nippon Bunri University (Graduate, AY2024)

*²Department of Aerospace Engineering, School of Engineering, Nippon Bunri University

1. はじめに

NASA CR (Contractor Report) として基本モデルが公開されているヘリコプタ・ロータ・シミュレーション・プログラム GEN-HEL⁽¹⁾を本学で内製することを目標に2023年度から卒業研究^(2,3)で取り組み、2024年度にはNASAによるロータ風洞試験結果⁽⁴⁾と比較検証を行いブレード失速による非線形性を捉える等の成果を得た。本稿(第1報)ではシミュレーションモデルの導出とシミュレーションの基本的な機能確認を行った結果について報告する。

2. ブレード運動の数学モデル

図1にヘリコプタ・ロータ・ハブとブレードの模式図を示す。慣性系に固定されたハブ非回転座標系 $O_H-X_{HF}-Y_{HF}-Z_{HF}$ の原点を中心とし、ハブの回転中心から e だけオフセットされたヒンジにブレードは連結しており、フラップ角 β と、リードラグ角 ζ の2つの回転自由度を持つ。NASAのロータ風洞試験結果と比較検証するため、2024年度卒業研究ではハブ位置は慣性系に

固定し、機体の運動は含めない。

 $\{x\} = \{\zeta, \beta\}^T$ についてのブレードの運動方程式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{M_B\} \quad (1)$$

を導出する。 $\{M_B\}$ はブレード空気力項である。

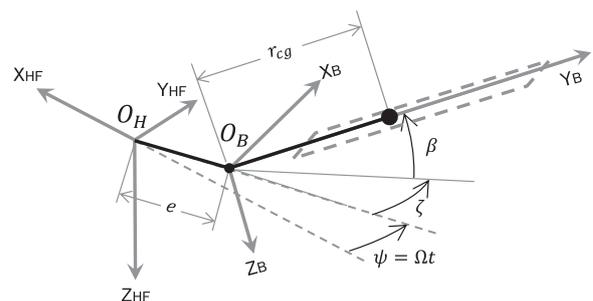


図1 ブレード重心位置

前述のように質点が回転運動しているため遠心力やコリオリ力が作用する。これらを正しく立式するために慣性座標系での位置を求め、ラグランジュの方法で運動方程式の左辺を導出する。ブレードに作用する重力は遠心力に比べて小さいので位置エネルギーは考えず、ラグランジュ関数としてブレードの運動エネルギーだけを考える。

図1からブレード固定座標系 $O_B-X_B-Y_B-Z_B$ でのブレード重心位置は $\{0, r_{cg}, 0\}^T$ である。これをフラップ方向に回転したハブブレード中間座標系 $O_B-X_{HB}-Y_{HB}-Z_{HB}$ に変換する。図2に示すように、2つの座標系の関係を表すフラップ角 β はフラップアップがプラスであり、両者の関係は次となる。

$$\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{HB} \\ Y_{HB} \\ Z_{HB} \end{pmatrix} \quad (2)$$

以降この変換行列を次のように表記する。

$$[\beta]_{B/HB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (3)$$

$[\beta]_{B/HB}$ の逆行列 $[\beta]_{HB/B}$ (本稿では、添え字の順番を逆にすることで逆行列を表す) によりブレード固定座標系でのブレード位置をブレード中間座標系に変換する。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r_{cg} \cos\beta \\ -r_{cg} \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_{cg} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

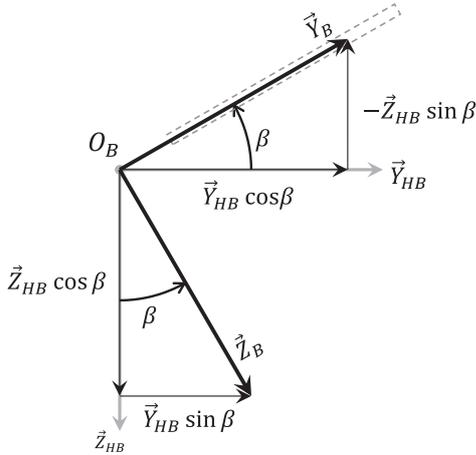


図2 ブレード固定座標とハブブレード中間座標

次にハブブレード中間座標 $O_B-X_{HB}-Y_{HB}-Z_{HB}$ からハブ回転座標系 $O_H-X_{HR}-Y_{HR}-Z_{HR}$ に変換する。図3に示すように、2つの座標系の関係を表すリードラグ角 ζ はロータ回転と同じリード方向がプラスであり、両者の関係は(5)式で表される。 e はヒンジオフセットであり、ブレードのフラップ、リードラグ角は回転中心ではなくヒンジを中心に発生する。

$$\begin{pmatrix} X_{HB} \\ Y_{HB} \\ Z_{HB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\zeta & -\sin\zeta & 0 \\ \sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{HR} \\ Y_{HR} - e \\ Z_{HR} \end{pmatrix} \quad (5)$$

以降この変換行列を次のように表記する。

$$[\zeta]_{HB/HR} = \begin{bmatrix} \cos\zeta & -\sin\zeta & 0 \\ \sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

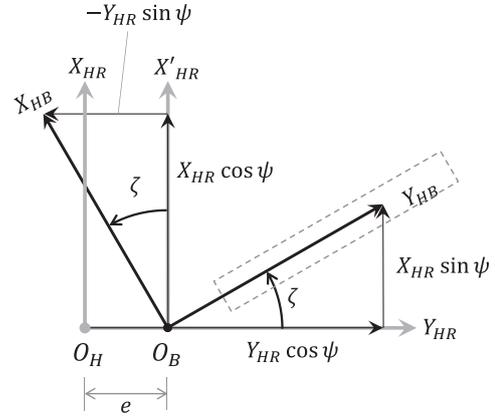


図3 ハブブレード中間座標系とハブ回転座標系

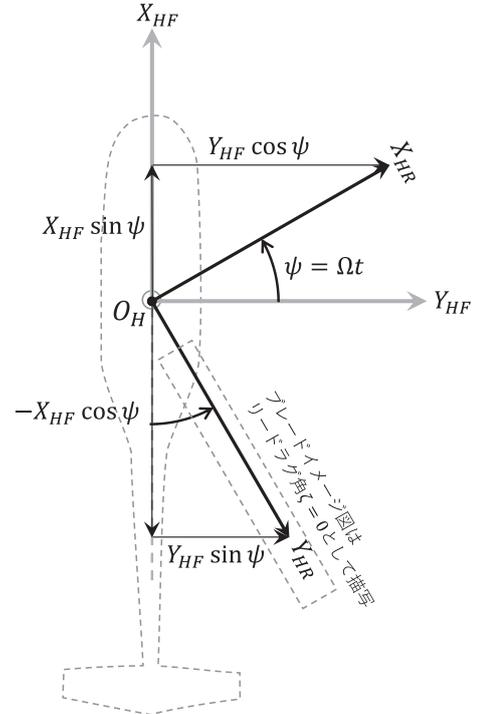


図4 ハブ回転座標系とハブ非回転座標系

$[\zeta]_{HB/HR}$ の逆行列によりハブブレード中間座標系でのブレード位置をハブ回転座標系に変換する。

$$\begin{pmatrix} X_{HR} \\ Y_{HR} - e \\ Z_{HR} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\zeta & \sin\zeta & 0 \\ -\sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_{cg} \cos\beta \\ -r_{cg} \sin\beta \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} X_{HR} \\ Y_{HR} \\ Z_{HR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{cg} \sin\zeta \cos\beta \\ r_{cg} \cos\zeta \cos\beta \\ -r_{cg} \sin\beta \end{pmatrix}$$

ハブ非回転座標系 $O_H-X_{HF}-Y_{HF}-Z_{HF}$ からハブ回転座標

系 $O_H-X_{HR}-Y_{HR}-Z_{HR}$ に変換する。図4に示すように2つの座標系の関係を表すロータ回転によるブレード方位角 $\psi = \Omega t$ (Ω は回転角速度) は機体上方から見て反時計回りがプラスであり、両者の関係は(8)式で表される。ヘリコプタ工学では機体後方にブレードが位置する場合を $\psi = 0$ とするのが慣例⁽⁵⁾で NASA CR⁽¹⁾ も同じ定義を使っているため、本稿もそれに合わせている。

$$\begin{Bmatrix} X_{HR} \\ Y_{HR} \\ Z_{HR} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{HF} \\ Y_{HF} \\ Z_{HF} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

以降この変換行列を次のように表記する。

$$[\psi]_{HR/HF} = \begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$[\psi]_{HR/HF}$ の逆行列 $[\psi]_{HF/HR}$ によりハブ回転座標系でのブレード位置をハブ非回転座標系に変換し、ハブ非回転座標系でブレード位置 $\{x, y, z\}^T$ を求める。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{cg} \sin\zeta \cos\beta \\ r_{cg} \cos\zeta \cos\beta \\ -r_{cg} \sin\beta \end{Bmatrix} \right) = e \begin{Bmatrix} -\cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{cg} \begin{Bmatrix} -\cos(\psi + \zeta) \cos\beta \\ \sin(\psi + \zeta) \cos\beta \\ -\sin\beta \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ラグランジュ関数を得るためブレードの重心位置を時間微分する。

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = e \begin{Bmatrix} \Omega \sin\Omega t \\ \Omega \cos\Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{cg} \begin{Bmatrix} (\Omega + \dot{\zeta}) \sin(\Omega t + \zeta) \cos\beta + \dot{\beta} \cos(\Omega t + \zeta) \sin\beta \\ (\Omega + \dot{\zeta}) \cos(\Omega t + \zeta) \cos\beta - \dot{\beta} \sin(\Omega t + \zeta) \sin\beta \\ -\dot{\beta} \cos\beta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

3成分を足し合わせラグランジュ関数を求めると(12)式となる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m e^2 \Omega^2 + m e r_{cg} \Omega \{ (\Omega + \dot{\zeta}) \cos\beta \cos\zeta - \dot{\beta} \sin\beta \sin\zeta \} + \frac{1}{2} m r_{cg}^2 \{ (\Omega + \dot{\zeta})^2 \cos^2\beta + \dot{\beta}^2 \} \end{aligned} \quad (12)$$

運動方程式(1)式の右辺の空気力項の第1成分を $M_{B(1)}$ と表すと、 ζ についての運動方程式は以下となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta} = m e r_{cg} \Omega^2 \cos\beta \sin\zeta + m r_{cg}^2 \{ \dot{\zeta} \cos^2\beta - 2\dot{\beta} (\Omega + \dot{\zeta}) \sin\beta \cos\beta \} = M_{B(1)} \quad (13)$$

β についても同様に $\{M_B\}$ の第二成分を $M_{B(2)}$ と表すと、 β についての運動方程式は以下となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} = m e r_{cg} \Omega^2 \sin\beta \cos\zeta + m r_{cg}^2 (\Omega + \dot{\zeta})^2 \sin\beta \cos\beta + m r_{cg}^2 \dot{\beta} = M_{B(2)} \quad (14)$$

(13), (14)式は、NASA CR⁽¹⁾ の 5.1-31頁の式に対応する。 ζ と β は小さいとし、 $\cos\zeta \simeq 1$, $\sin\zeta \simeq \zeta$, $\cos\beta \simeq 1$, $\sin\beta \simeq \beta$ と近似し変数同士の積を省略すると運動方程式は以下となる。

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\zeta} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \zeta \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m r_{cg}^2 & 0 \\ 0 & m r_{cg}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m e r_{cg} \Omega^2 & 0 \\ 0 & m r_{cg} (e + r_{cg}) \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \beta \end{Bmatrix} = \{M_B\} \quad (15)$$

次に、ブレードの運動方程式(15)式の右辺の空気力を求める。ブレード空気力を求めるためには動圧、すなわち、ブレード速度が必要である。ブレード速度には、ロータ回転等のブレード運動による速度とヘリコプタの飛行速度(風洞では風洞速度)による成分がある。本来であれば、誘導速度を含めるべきだが、2024年度の卒業研究としては誘導速度を省略している。関係する座標系を図5に示す。

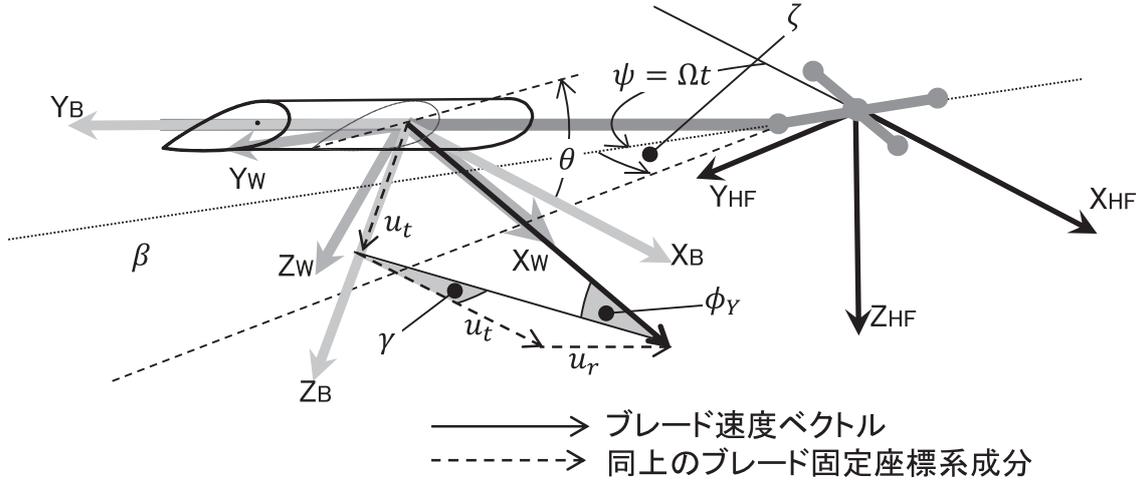


図5 ブレード速度に関わる座標系

ブレード運動による速度について述べる。位置を時間微分すれば速度を求めることが可能であるが、回転している座標系の場合は基底ベクトルの時間変化を考慮する必要がある、面倒である。そこで本稿では、 O_H - X_{HF} - Y_{HF} - Z_{HF} : ハブ非回転座標系での速度を微分した上で、座標変換によりブレード固定座標系に持って行く。

ハブ非回転座標系でのブレード運動による速度(11)式を $[\psi]_{HR/HF}$ 等によりハブ回転座標系に変換する。

$$\begin{aligned}
 [\beta]_{B/HB} [\zeta]_{HB/HR} [\psi]_{HR/HF} & \left(e \begin{Bmatrix} \Omega \sin \Omega t \\ \Omega \cos \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{cg} \begin{Bmatrix} (\Omega + \zeta) \sin(\Omega t + \zeta) \cos \beta + \dot{\beta} \cos(\Omega t + \zeta) \sin \beta \\ (\Omega + \zeta) \cos(\Omega t + \zeta) \cos \beta - \dot{\beta} \sin(\Omega t + \zeta) \sin \beta \\ -\dot{\beta} \cos \beta \end{Bmatrix} \right) \\
 & = e \begin{Bmatrix} \Omega \cos \zeta \\ \Omega \sin \zeta \cos \beta \\ \Omega \sin \zeta \sin \beta \end{Bmatrix} + r_{cg} \begin{Bmatrix} (\Omega + \zeta) \cos \beta \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} \quad (16)
 \end{aligned}$$

次に機体飛行速度（本研究では風洞風速）の成分について述べる。図6に示すように風洞を表す慣性系 X_I - Y_I - Z_I （風洞）と機体に固定されたハブ非回転座標系の関係を表す迎え角 α_s はピッチアップ方向をプラスとし、両者の関係は以下で表される。

$$\begin{Bmatrix} X_{HF} \\ Y_{HF} \\ Z_{HF} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_s & 0 & -\sin \alpha_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_s & 0 & \cos \alpha_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{Bmatrix} \quad (17)$$

以降この変換行列を次のように表記する。

$$[\alpha_s]_{HF/I} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_s & 0 & -\sin \alpha_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_s & 0 & \cos \alpha_s \end{bmatrix} \quad (18)$$

$[\alpha_s]_{HF/I}$ により慣性系（風洞）で表される風洞速度 $\{V, 0, 0\}^T$ をハブ非回転座標系に変換すると次式となる。

$$\begin{Bmatrix} V \cos \alpha_s \\ 0 \\ V \sin \alpha_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_s & 0 & -\sin \alpha_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_s & 0 & \cos \alpha_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

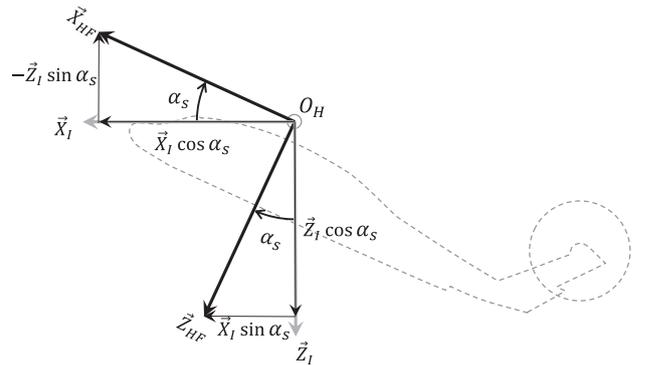


図6 ハブ非回転座標系と慣性座標系

前記速度を $[\psi]_{HR/HF}$, $[\zeta]_{HF/HB}$, $[\beta]_{B/HB}$ により座標変換し, ブレード固定座標系の速度を求める。

$$[\beta]_{B/HB}[\zeta]_{HB/HR}[\psi]_{HR/HF} \begin{Bmatrix} V\cos\alpha_s \\ 0 \\ V\sin\alpha_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V\cos\alpha_s \sin(\psi + \zeta) \\ -V\cos\alpha_s \cos(\psi + \zeta) \cos\beta - V\sin\alpha_s \sin\beta \\ -V\cos\alpha_s \cos(\psi + \zeta) \sin\beta + V\sin\alpha_s \cos\beta \end{Bmatrix} \quad (20)$$

本式は NASA CR⁽¹⁾の P5.1-22, UPAMR (IB) 等に対応する。以上, (16)式と(20)式を合わせてブレード固定座標系でのブレード速度とする。 u_t , u_r , u_p との表記は CR⁽¹⁾に合わせたもので, CR⁽¹⁾では Y 方向速度の定義が右手系座標に対しプラス方向が逆になっているので, Y 方向成分は $-u_r$ となっている。第2報の付録に収録するソースコードでは, $\cos\zeta \approx 1$, $\sin\zeta \approx \zeta$, $\cos\beta \approx 1$, $\sin\beta \approx \beta$ と近似し変数同士の積を省略しているので注意。

$$\begin{Bmatrix} u_t \\ -u_r \\ u_p \end{Bmatrix} = e \begin{Bmatrix} \Omega\cos\zeta \\ \Omega\sin\zeta\cos\beta \\ \Omega\sin\zeta\sin\beta \end{Bmatrix} + r_{cg} \begin{Bmatrix} (\Omega + \dot{\zeta})\cos\beta \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} + V \begin{Bmatrix} \cos\alpha_s \sin(\psi + \zeta) \\ -\cos\alpha_s \cos(\psi + \zeta) \cos\beta - \sin\alpha_s \sin\beta \\ -\cos\alpha_s \cos(\psi + \zeta) \sin\beta + \sin\alpha_s \cos\beta \end{Bmatrix} \quad (21)$$

以上のブレード速度 $\{u_t, -u_r, u_p\}^T$ からブレードに働く揚力 l と抗力 d を求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} -d \\ 0 \\ -l \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\rho(u_t^2 + u_r^2 + u_p^2)S \begin{Bmatrix} c_d \\ 0 \\ c_l \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ここで, S はブレード翼面積, ρ は空気密度である。ブレード空気力 $\{-d, 0, -l\}^T$ は, X 軸をブレード相対風に一致させたブレード相対風座標系 X_W - Y_W - Z_W での成分であり, ブレード固定座標系と同様, X 軸をブレード進行方向, Z 軸をブレード下方方向としているので, 抗力と揚力にはマイナスが付く。このままでは(15)式の右辺に持つて行くことはできず, ブレード固定座標系に変換する必要がある。この変換は u_t , u_r , u_p で表現される。ブレード固定座標系 X_B - Y_B - Z_B の X_B - Y_B 面内で翼断面では, Y_B 方向速度 $-u_r$ により流入速度はブレードに対して傾いた方向から入っている。この角度をヨー角 γ とし, γ だけ Z 軸方向に回転した座標系をブレードヨー座標系 O_B - X_{BW} - Y_{BW} - Z_{BW} とすると両者の関係は図7から次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} X_{BW} \\ Y_{BW} \\ Z_{BW} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix} \quad (23)$$

同様に, u_p により流入速度はブレードのピッチ角方向斜め方向から入っている。この角度を流入角 ϕ_Y とすると, 図8に示されるようにブレードヨー座標系 O_B - X_{BW} - Y_{BW} - Z_{BW} とブレード相対風座標系 O_B - X_W - Y_W - Z_W は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_Y & 0 & -\sin\phi_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi_Y & 0 & \cos\phi_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{BW} \\ Y_{BW} \\ Z_{BW} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

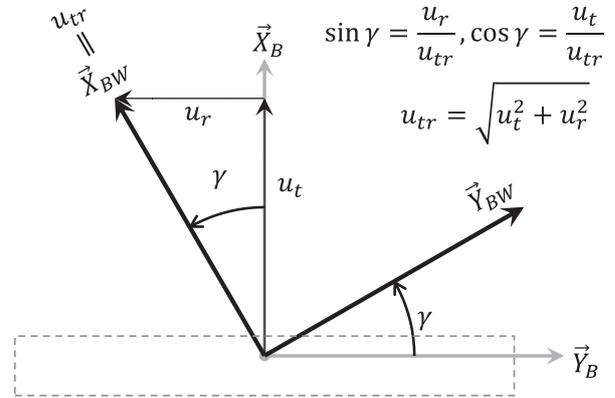


図7 ハブブレード中間座標系とハブ回転座標系

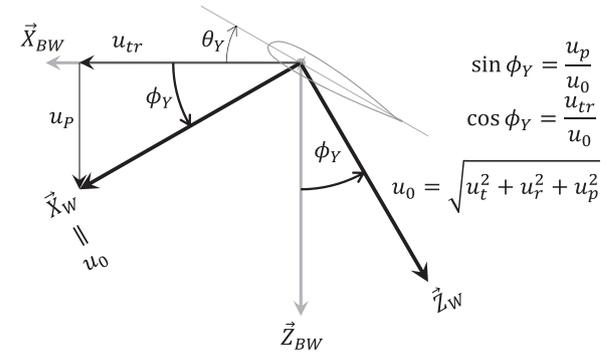


図8 ハブブレード中間座標系とハブ回転座標系

(23)式, (24)式の変換行列 $[\gamma]_{BW/B}$, $[\phi_Y]_{W/BW}$ は $\{u_t, -u_r, u_p\}^T$ の関係から次のように書き換えることができる。

$$[\gamma]_{BW/B} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{u_{tr}} \begin{bmatrix} u_t & -u_r & 0 \\ u_r & u_t & 0 \\ 0 & 0 & u_{tr} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
[\phi_Y]_{W/BW} &= \begin{bmatrix} \cos\phi_Y & 0 & \sin\phi_Y \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sin\phi_Y & 0 & \cos\phi_Y \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{u_0} \begin{bmatrix} u_{tr} & 0 & u_p \\ 0 & u_0 & 0 \\ -u_p & 0 & u_{tr} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (26)$$

$[\gamma]_{B/BW}$, $[\phi_Y]_{BW/W}$ によりブレード相対風座標系 $O_B-X_W-Y_W-Z_W$ の $\{-d, 0, -l\}^T$ をブレード固定座標系 $X_B-Y_B-Z_B$ に変換すると次となる。

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} Fb_x \\ Fb_y \\ Fb_z \end{Bmatrix} &= [\gamma]_{B/BW} [\phi_Y]_{BW/W} \begin{Bmatrix} -d \\ 0 \\ -l \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{u_0 u_{tr}} \begin{bmatrix} u_t u_{tr} & u_r u_0 & -u_t u_p \\ -u_r u_{tr} & u_t u_0 & u_r u_p \\ u_p u_{tr} & 0 & u_{tr}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ 0 \\ -l \end{Bmatrix}
\end{aligned} \quad (27)$$

揚力係数 c_l はブレード迎え角 α によって変化する。

抗力係数 c_d は、迎角に依らず一定値として0.01とする。

揚力係数 c_l は薄翼理論から次式とし、

$$c_l = a\alpha \quad \text{where } a = \frac{dc_l}{d\alpha} \quad (28)$$

迎角 α はブレードピッチ角 θ_Y とブレードの相対風による流入角 ϕ_Y (図8参照) から次式とする。

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \tan(\phi_Y + \theta_Y) = \frac{\tan\phi_Y + \tan\theta_Y}{1 - \tan\phi_Y \tan\theta_Y} \\
&= \frac{\frac{u_p}{u_{tr}} + \frac{u_t \tan\theta}{u_{tr}}}{1 - \frac{u_p}{u_{tr}} \frac{u_t \tan\theta}{u_{tr}}} \\
&= \frac{u_p + u_t \tan\theta}{u_{tr} - u_p u_t \tan\theta / u_{tr}}
\end{aligned} \quad (29)$$

θ はブレード固定座標系の Y_B 軸周りのピッチ角であるが、 θ_Y はブレード相対風座標系の Y_W 軸周りのピッチ角であり、両者の間には、 $u_t \tan\theta = u_{tr} \tan\theta_Y$ の関係がある。(29)式の $\tan\theta$ を級数展開すると NASA CR⁽¹⁾ の 5.1-25頁の $\tan\alpha$ 式に一致する。

揚力傾斜 α について、前述のとおり誘導速度をブレード速度に含めていないことを鑑み、揚力傾斜 α をアスペクト比 A により補正する⁽⁶⁾。

$$a = \frac{dc_l}{d\alpha} = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi A}} = \frac{2\pi}{1 + \frac{2}{A}} \quad (30)$$

$a_0 = 2\pi$ は薄翼理論の理論値であり、ブレードのアスペクト比12.1から、 $\alpha = 5.39$ とした。

以上により求められたブレード固定座標系でのブレード空気力 $\{Fb_x, Fb_y, Fb_z\}^T$ を運動方程式(15)式の右辺 $\{M_B\}$ に入れる。リードラグ角 ζ と Fb_x のプラス方向はリード方向で一致しているが、フラップ角 β はフラップアップがプラスとなっているのに対し Fb_z は鉛直下方が

プラスと極性が逆になっているので反転させる。ヒンジから空力代表点までの長さを r_a とすると次式となる。

$$\{M_B\} = r_a \begin{Bmatrix} Fb_x \\ -Fb_z \end{Bmatrix} \quad (31)$$

以上により、 (ζ, β) についての運動方程式として次式を得る。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = r_a \begin{Bmatrix} Fb_x \\ -Fb_z \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$[D]$ は次式で表される減衰行列である。

$$[D] = \begin{bmatrix} 0.05(2mr_{cg}\Omega\sqrt{r_{cg}e}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

ヘリコプタではリードラグ方向にダンパーが通常設けられているのでそれを表す。

3. 計算結果

3-1 計算諸元

(32)式を odeint を用いて時間積分する python プログラムを作成した。全ての計算の時間刻みはロータ1回転を60分割とし、図10を除き50秒間計算を行った。

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega(=27)} \frac{1}{60} = 0.00387851[\text{sec}] \quad (34)$$

NASA CR⁽¹⁾ に記載されている $M_b = 86.7[\text{slug-ft}]$ (1st mass moment of blade about the hinge), $I_b = 1512.6[\text{slug-ft}^2]$ (Inertia of blade about the hinge) には、

$$M_b = mr_{cg}, \quad I_b = m r_{cg}^2 \quad (35)$$

の関係があるから、

$$r_{cg} = \frac{I_b}{M_b} = 17.45[\text{ft}] = 5.318[\text{m}] \quad (36)$$

$$m = \frac{M_b}{r_{cg}} = 4.970[\text{slug}] = 72.53[\text{kg}] \quad (37)$$

とする。

表1 計算(実機)諸元

記号	値	意味	根拠
Ω	27[rad/s]	ロータ回転角速度	CR ⁽¹⁾
m	72.5[kg]	ブレード質量	(37)式
R	8.178[m]	ロータ半径	CR ⁽¹⁾
e	0.381[m]	ヒンジオフセット	CR ⁽¹⁾
r_{cg}	5.32[m]	ブレード重心位置	(36)式
r_a	4.7[m]	ブレード空力半径	(41)式
r_Q	6.1[m]	トルク半径	(52)式
S	3.36[m ²]	ブレード面積	(42)式
c	0.527[m]	ブレード翼弦長	CR ⁽¹⁾
ρ	1.225[kg/m ³]	標準大気	—

ブレードの重心位置を表す r_{cg} とは別にブレードの空力代表点を表す r_a を設定する。本稿の計算ではブレードを1つの要素と見なしているため、ホバリング時のブレード揚力は

$$l = \frac{1}{2} \rho (\Omega r_a)^2 c_l S \quad (38)$$

で表されるが、周速は半径位置により異なる。この効果を積分した場合は、次式となる。

$$l = \int_0^R \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 c_l c dr = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 c_l S \frac{R^3}{3} \quad (39)$$

翼面積を $S = cR$ とすると、

$$l = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 c c_l \frac{R^3}{3} = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 c_l S \frac{R^2}{3} \quad (40)$$

(38)式と(40)式が等しくなる r_a を求めると

$$r_a^2 = \frac{R^2}{3} \rightarrow r_a = \frac{R}{\sqrt{3}} = 4.7[\text{m}] \quad (41)$$

このように r_a は回転中心からの長さであり、(31)式に用いる場合は e を差し引いた4.3 [m] が正しいが、第2報の付録に示すコードでは r_a を4.7 [m] としている。今後機会を見て修正が必要である。

UH-60ブレードはほぼ翼弦長が一定であるため、ロータ半径とブレード翼弦長から成る長方形としてブレード面積を設定することはできるが、ハブへの取付部、つまり、根元は翼を成していないのでその部分を取り除く。カットアウト量はTM4183⁽⁴⁾のp77の図を測り22%とした。

$$S = 1.73 \times 26.83 \times 0.78 = 36.2[\text{ft}^2] = 3.36[\text{m}^2] \quad (42)$$

3-2 空気無の計算

ロータ風洞試験との比較検証の前に、基礎的な確認として、(33)式の減衰なし、空気力なし(空気密度 $\rho = 0$)での計算を行った結果を図9に示す。初期値はリードラグ角、フラップ角ともに0.001 [rad] であり、以降の計算もすべて同じである。

フラップ角とリードラグ角はそれぞれの周期ごとに初期値と同じ位置に戻る自由振動となった。リードラグ角の周期が0.8688秒、フラップ角の周期が0.2249秒になっている。(15)式からフラップ角とリードラグ角の固有振動数は以下となる。

$$\omega_\beta = \Omega \sqrt{\frac{r_{cg} + e}{r_{cg}}} = 27.95 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (43)$$

$$\omega_\zeta = \Omega \sqrt{\frac{e}{r_{cg}}} = 7.226 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (44)$$

フラップ角の周期は $T_\beta = 2\pi/\omega_\beta = 0.224794$ 秒、リードラグ角の周期は $T_\zeta = 2\pi/\omega_\zeta = 0.869525$ 秒となり、計算分解能を考慮すれば両者は一致しているといえる。

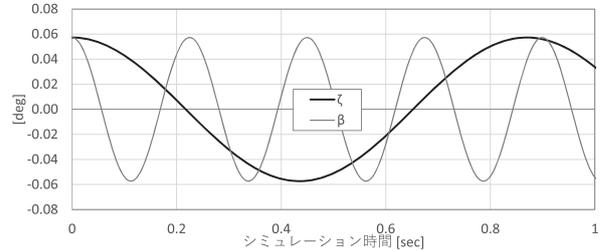


図9 空気なし計算結果

3-3 基本的な確認：ホバリング

次に空気力を加える。前節に続き、(33)式の減衰なし、ピッチ角 $\theta_0 = 2$ [deg]とした。計算結果を図10に示す。

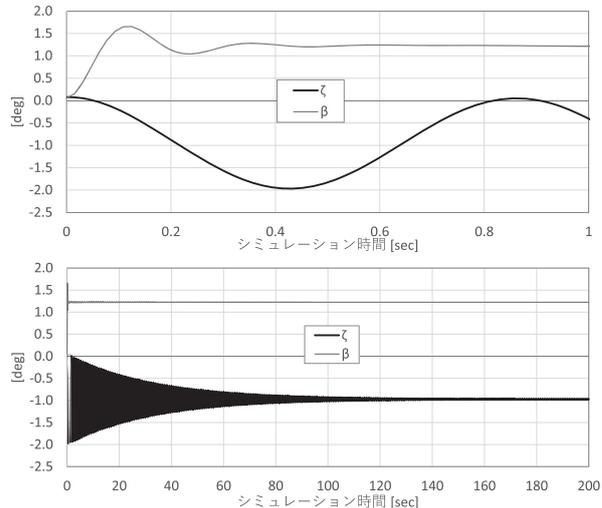


図10 空気あり計算結果 (ホバリング)

フラップ角とリードラグ角は時間経過とともにある値に収束した。リードラグ角の収束に至るまでの動きは空気力なしの場合と同様な周期で変動しているのに対して、フラップ角は1周期程度の動きの中ではほぼ収束しているという違いがある。この違いは揚力と抗力の違いにより、(28)式に示すように迎え角により揚力係数は変化する一方抗力係数は一定値となっている。迎え角による揚力変化については、(29)式の迎え角分母にある u_p には(21)式第2項にあるフラッピングによる成分 $r_{cg}\dot{\beta}$ があり、これが減衰として働く。リードラグ角については特に減衰がはたらく要素はないので固有振動数 ω_ζ での変動が継続するが、(27)式に示される座標変換を介しフラップ方向の減衰がリードラグ方向にも影響するため最終的には収束すると考えられる。

フラップの収束値はプラスであり、リードラッグの収束値はマイナスとなっている。プラスのピッチ角により揚力が発生しフラップ角はプラスの値に収束し、リードラッグ角は抗力によりマイナスの値に収束していることになる。

3-1 および 3-2 では基本的な特性を把握するため、減衰をゼロとして計算してきたが、実機にはリードラッグダンパーが搭載されていることを鑑み、以降は33式の減衰ありで計算を行う。

3-4 基本的な確認：前進速度あり

前進速度ありの計算条件について説明する。ヘリコプタの前進速度は、アドバンス比 μ と呼ばれるホバリング時のブレード翼端速度 ΩR と風洞風速（飛行速度）の比率で表される⁽⁵⁾。

$$\mu = \frac{V \cos \alpha_s}{\Omega R} \tag{45}$$

軸対称であるホバリングに対し、前進飛行は特定の方向に向かって進むためブレードピッチ角 θ を次式により1周の間に変化させる必要がある⁽⁵⁾。

$$\theta = \theta_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi \tag{46}$$

θ_0 はコレクティブピッチ角、 A_1 、 B_1 はサイクリックピッチ角と呼ばれる。

$\mu = 0.301$, $\alpha_s = 0$, $\theta_0 = 6$, $A_1 = B_1 = 0$ [deg] での結果を図11に示す。ロータ1回転により同じ風速条件に戻ることから、横軸の主目盛線間隔は、ロータ1回転 $0.23271[\text{sec}] = 2\pi/\Omega (=27 [\text{rad/s}])$ に合わせ、補助目盛線は4分の1回転、つまり方位角で90度に対応させている。100回転後にはロータ回転に応じた周期解と

なっているリードラッグ角は、ホバリング時の計算と同様減衰が弱く、最初の数回転では固有振動数に近い動きとなっている。図11下段に示すようにある程度の時間経過後は全てのブレードは同じ軌跡を描いており、横軸を方位角とした場合に一致する関係になっている。(8)式および図4に表されるように $j=0$ ブレード○は、時刻ゼロで機体後方に位置するところ、主目盛位置で最小のフラップ角になり、ロータ半回転後（補助目盛線2つ先）で最大のフラップ角になっている。これはロータが後方に煽られていること（後傾）を表している。

実際のヘリコプタが前進飛行する際にはロータを前傾させるためにサイクリックピッチ角を使う。そこで $B_1 = 0, 2, 4, 8$ [deg] の計算を実施してみた。周期解に収束した100回転時の結果を $j=0$ ブレードのみ各計算条件で比較して図12に示す。

B_1 をプラス方向に変化させた場合、 $B_1 = 8$ [deg] では機体後方となる主目盛位置付近で最大フラップ角、反対側で最小フラップ角と、 $B_1 = 0$ [deg] では後傾していたロータが前傾に変わっていく様子が確認できる。 B_1 の増加に伴いリードラッグ角も減少し $B_1 = 4$ [deg] 以上では収束解がほぼマイナスになっている。

以上の計算結果をロータ6分力で評価してみる。運動方程式(32)式の右辺にくる(27)式のブレード空気力はブレード固定座標系のものであり、合力としてのロータ揚力は風洞風速を基準とする慣性座標系で定義されるので、座標変換する。

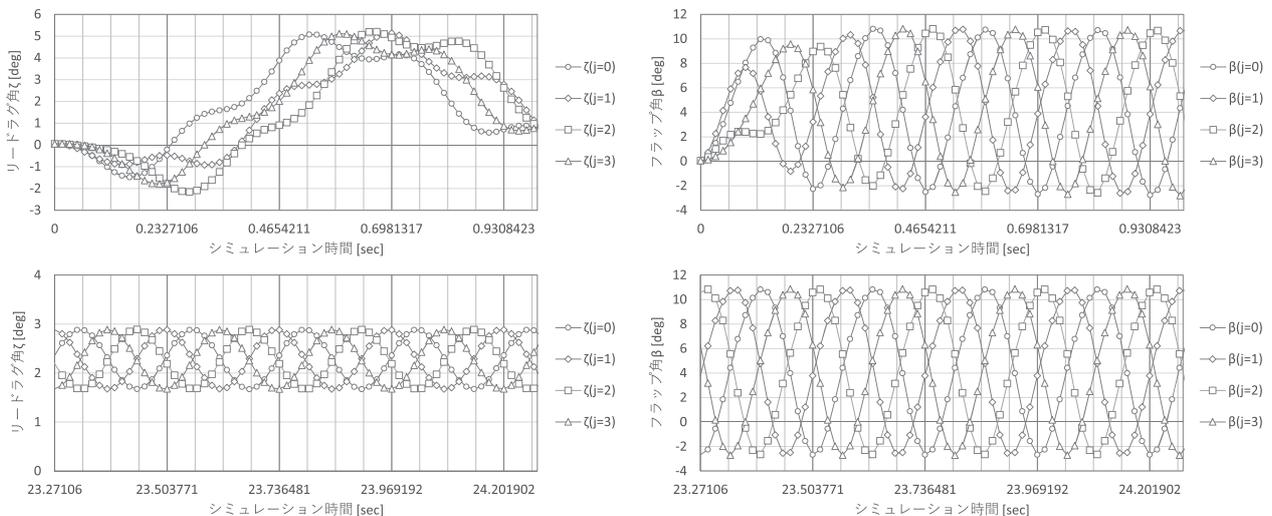


図11 空気有ホバリングでの時歴プロット（注：本図のプロット点は、計算結果を間引いている）

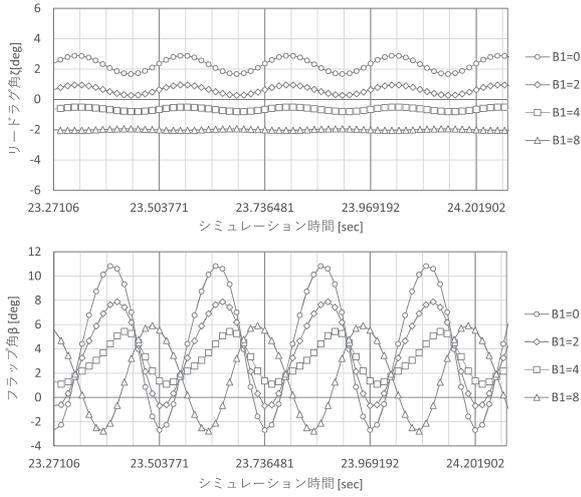


図12 縦サイクリックピッチ角効果

$$\begin{pmatrix} -D_j \\ Y_j \\ -L_j \end{pmatrix} = [\alpha_s]_{I/HF} [\psi_j]_{HF/HR} [\zeta_j]_{HR/BW} [\beta_j]_{BW/B} \begin{pmatrix} Fb_{Xj} \\ Fb_{Yj} \\ Fb_{Zj} \end{pmatrix} \quad (47)$$

$j = 0, 1, 2, 3$ の各ブレードについて上記を求め、合算してロータ揚力 L 、ロータ抗力 D を求める。

$$L = \sum_{j=0}^3 L_j, D = \sum_{j=0}^3 D_j \quad (48)$$

トルクはハブ回転座標系でのブレード空気力 Fhr_{Xj} , Fhr_{Yj} , Fhr_{Zj} を求め

$$\begin{pmatrix} Fhr_{Xj} \\ Fhr_{Yj} \\ Fhr_{Zj} \end{pmatrix} = [\zeta_j]_{HR/BW} [\beta_j]_{BW/B} \begin{pmatrix} Fb_{Xj} \\ Fb_{Yj} \\ Fb_{Zj} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$j = 0, 1, 2, 3$ の各ブレード分を合算する。

$$Q = \sum_{j=0}^3 r_Q Fhr_{Xj} \quad (50)$$

r_Q は、ブレードを1つの要素としてみる本稿のやり方と積分を行った場合との比較から、

$$\begin{aligned} r_Q \frac{1}{2} \rho (\Omega r_a)^2 (cR) c_d &= \frac{1}{2} \rho \Omega^2 c c_d \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{1}{8} \rho \Omega^2 c c_d R^4 \end{aligned} \quad (51)$$

において、(41)式の r_a と R の関係を反映すると、次となる。

$$r_Q r_a^2 = \frac{1}{4} R^3 \rightarrow r_Q = \frac{1}{4} \frac{R^3}{r_a^2} = \frac{3}{4} R = 6.1 [\text{m}] \quad (52)$$

以上の式および諸元を使って50秒の時歴計算結果から計

算終了直前のロータ1回転分の平均をエクセルで計算しトルク係数と抗力係数を求めた結果を図13に示す。 C_L , C_D , C_Q は、ロータの円面積、ホバリング時の翼端速度による無次元係数^(4,5)である。

$$\begin{cases} C_L = \frac{L}{\rho \pi R^2 (\Omega R)^2} \\ C_D = \frac{D}{\rho \pi R^2 (\Omega R)^2} \\ C_Q = \frac{Q}{\rho \pi R^3 (\Omega R)^2} \end{cases} \quad (53)$$

図13の棒グラフの値は、 $B_1 = 0$ [deg] では、トルクがマイナスになっており、風車状態であることが確認できる。抗力はプラス、すなわちロータが前傾し前方 (X 軸プラス) の力を発生している $B_1 = 4$ [deg] ではフラップ角からもロータが前傾していることが確認できる。

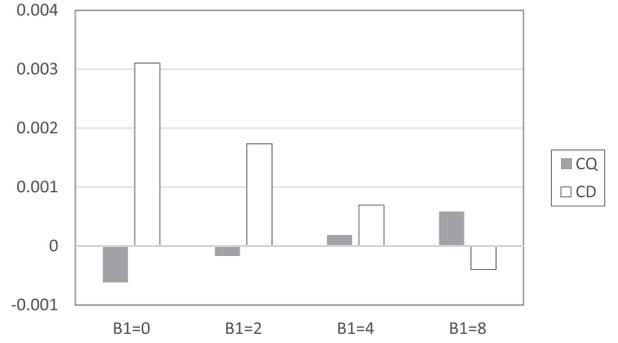


図13 縦サイクリックピッチ効果

4. おわりに

公開されている NASA CR⁽¹⁾ に基づいたシミュレーションプログラムを開発し、基本的な確認結果について報告した。第2報では NASA 風洞試験⁽⁴⁾ 結果との比較検証結果を報告する。

参考文献

- (1) Howlett, J. J., UH-60A Black Hawk engineering simulation program. Volume 1 : Mathematical model, NASA-CR-166309 (1981)
- (2) 加藤翔大, 中山周一, NBU GEN-HEL の開発, 日本航空宇宙学会第61回飛行機シンポジウム講演集, JSASS-2023-5210 (2023)
- (3) 大城鳳花, 中山周一, GEN-HEL NASA ロータ風洞試験との比較検証の試み, 日本航空宇宙学会西部支部講演会 (2024), JSASS-2024-S004

- (4) Singleton, Jeffrey D., Yeager, William T., Jr., Wilbur, Matthew L., Performance Data from a Wind-Tunnel Test of Two Main-rotor Blade Designs for a Utility-Class Helicopter, NASA-TM-4183 (1990)
- (5) 加藤寛一郎, 今永勇生, ヘリコプタ入門, 東京大学出版会 (1985)
- (6) John Anderson, Fundamentals of Aerodynamics, third edition, McGraw-Hill (2001)

(2025年6月16日受理)