

〔事例報告〕

加振器を用いた学生実験および研究展示

松原 力哉*, 中山 周一*, 有吉 雄哉*, 室園 昌彦*

*日本文理大学工学部航空宇宙工学科

Resonance Testing Using Vibrator and its Display

Rikiya MATSUBARA*, Shuichi NAKAYAMA*, Yuya ARIYOSHI*, Masahiko MUROZONO*

*Department of Aerospace Engineering, School of Engineering, Nippon Bunri University

1. はじめに

共振・共鳴は、弦楽器や管楽器から出る音を応用例として高校物理の教科書⁽¹⁾に記載されているように応用範囲が広い力学現象である。日本建築学会による「阪神・淡路大震災を振り返り、来たる大地震に備える（建築振動研究に課せられたもの）」シンポジウム⁽²⁾に例を見るように剛に見える建築構造物でも共振などの振動問題が発生する。軽量が求められる航空宇宙分野では柔軟な構造が多く共振が問題になることが多いといえるが、共振は機械や建築も含め構造物を扱う工学分野に共通する問題であり、その適用範囲は広い。本学航空宇宙工学科では2024年度に加振器（エミック製513-B）を導入し、共振実験を始めた。本事例報告では、片持ち梁の共振の学生実験の紹介と同実験に関する理論およびシミュレーションの他、平板の共振のオープンキャンパス展示について報告する。

2. 金属梁の共振実験，理論およびシミュレーション

2-1 学生実験

加振器に金属梁を取り付け加振すると図1に示すような共振を目視で観察することができる。航空宇宙工学科では2024年度の後期から2年次の必修科目：航空工学実験1の中で本加振器を用いた共振実験を始めた。



図1 片持ち梁の共振（1次モード11.6Hz）
（本写真は学生実験ではなく2-4追加実験時のもの）

加振器はファンクションジェネレータからの信号入力に応じた振動を発生させるので、学生実験では、ファンクションジェネレータで周波数を調整する学生と、金属板の振れを目視で観察する学生の連携により振動数の設定を変えて共振条件を探すことを基本としている。その様子を図2に示す。

金属梁にはおもりを取り付けられる穴を設けてあり、学生実験では図3に示すとおり、おもりの追加により共振振動数が変化する様子を記録させている。ある固有振動数を持つ構造体に質量を追加すると、固有振動数が低下し、元の状態では問題にならなかった共振が発生する

ことがあるということを感じさせることを意図している。

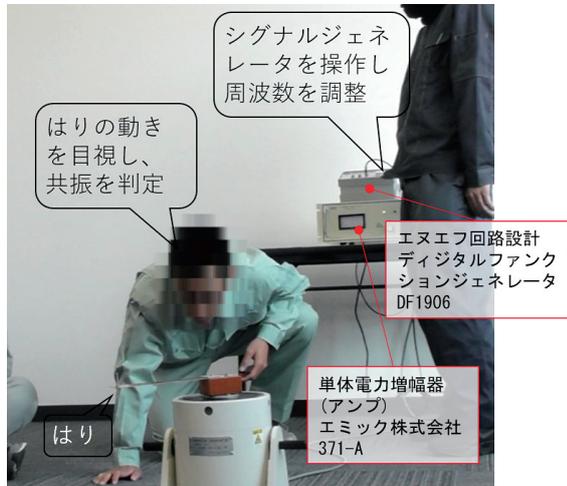


図2 学生実験の様子

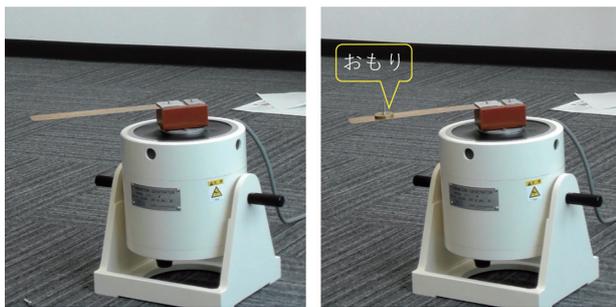


図3 学生実験でのおもりの設定

金属梁の支持条件を図4に示し、実験機器については表1に示す。金属梁の諸元等は次節に示す。



図4 金属梁の支持条件

表1 実験機器

加振器	エミック株式会社513-B ⁽³⁾
アンプ	単体電力増幅器 エミック株式会社371-A ⁽³⁾
ファンクションジェネレータ	株式会社エヌエフ回路設計ブロック デジタルファンクションジェネレータ DF1906 ⁽⁴⁾

2-2 理論

振動によって生じるたわみは時間 t と梁の長手方向の梁の根元からの長さ x に依存するので $w(t, x)$ と表す。梁の微小要素の x 軸方向の長さを dx 、微小要素の断面積を A 、微小要素の密度を ρ とすると、微小要素の質量は $\rho A dx$ となるので、微小要素のたわみ方向の運動方程式は次式のとおりになる。

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F \quad (1)$$

材料力学に基づくと、たわんだ梁のたわみ方向に下向きにはたらく力を正とするせん断力 F と曲げモーメント M の関係は(2)式で表せる。 E をヤング率、 I を断面2次モーメントとすると、たわみ $w(t, x)$ と曲げモーメント M の間には(3)式が成り立つ。

$$F = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2)$$

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3)$$

(1)式に、(2)式を代入し、さらに(3)式を代入すると次式のとおりになる。

$$\begin{aligned} (\rho A dx) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial M}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (4)$$

よって、これを x で偏微分し次式を得る。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (5)$$

上式の解について、 $w(x) = \sin \beta x$ と仮定し、角固有振動数を ω としたときの時間に応じた変化を表す $\sin \omega t$ と $w(x)$ の積として表す。

$$w = w(x) \sin \omega t = \sin \beta x \sin \omega t \quad (6)$$

(6)式を(5)式に代入すると次式が得られる。

$$-\omega^2(\sin \beta x \sin \omega t) + \beta^4 \frac{EI}{\rho A} (\sin \beta x \sin \omega t) = 0 \quad (7)$$

梁のたわみ振動では(7)式を満足するためには、次式が成り立つ必要がある。

$$-\omega^2 + \beta^4 \frac{EI}{\rho A} = 0 \quad (8)$$

よって、 i を虚数単位として、 β は次式の4つになる。

$$\beta = \pm \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}}, \pm i \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}} \quad (9)$$

(6)式の $w(x)$ を $\sinh \beta x$, $\cos \beta x$, または $\cosh \beta x$ としても、(7), (8), (9)式が成り立つ。 $w(x)$ は、(10)式のとおり、三角関数 \sin , \cos , 双曲線関数 \sinh , \cosh の4つそれぞれに係数を掛けて表す。係数を C_1, C_2, C_3, C_4 とする。

$$w(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (10)$$

2-1の実験の金属梁の根元 ($x = 0$) は固定端であるため $w = 0$, $w' = 0$ となる必要があることから、(10)式より次の関係が成り立つ。

$$C_1 + C_3 = 0, C_2 + C_4 = 0 \quad (11)$$

金属梁の $x = l$ は自由端であり、剪断力が零、曲げモーメントも零になることから、 $w'' = 0$, $w''' = 0$ となる必要があるため、(10)式と(11)式から(12)式の C_1, C_2 に関する連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} C_1(\cosh \beta l + \cos \beta l) + C_2(\sinh \beta l + \sin \beta l) = 0 \\ C_1(\sinh \beta l - \sin \beta l) + C_2(\cosh \beta l + \cos \beta l) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

この連立方程式を行列の積で表すと次式になる。

$$\begin{bmatrix} \cosh \beta l + \cos \beta l & \sinh \beta l + \sin \beta l \\ \sinh \beta l - \sin \beta l & \cosh \beta l + \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (13)$$

零ではない C_1, C_2 が存在するためには、(13)式の左辺の行列の行列式が零になる必要があり、(14)式が得られる。

$$\cosh \beta l \cos \beta l + 1 = 0 \quad (14)$$

(14)式について、 βl を横軸にとり、図5のグラフを作成した。

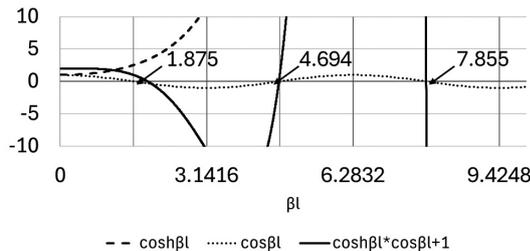


図5 $\cosh \beta l \cos \beta l + 1$

図5のとおり、(14)式を満たす βl は無限に存在するため、梁の振動には無限にモードが存在し、モードごとに梁のたわみや固有振動数がある。

次に、たわみの理論解を求める式を求めた。(10)式を(11)式および(14)式の関係から書き換えた(15)式を得る。

$$w(x) = C_1(\cosh \beta x - \cos \beta x) + C_2(\sinh \beta x - \sin \beta x) \quad (15)$$

(15)式を2階微分し、 $x = l$ で $w'' = 0$ となることから(16)式を得た。

$$w'' = C_2 = -\frac{\cosh \beta l + \cos \beta l}{\sinh \beta l + \sin \beta l} C_1 \quad (16)$$

最後に(16)式について、たわみ $W(x) = \frac{w(x)}{-C_1}$ と考え、(14)式を満たす n 次モードの βl を、 $\beta_n l$ とした場合に、梁の根本 ($x = 0$) からの長さ x におけるたわみを $W_n(x)$ とすると、(17)式が得られる⁽⁵⁾。

$$W_n(x) = (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - \frac{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l} (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x) \quad (17)$$

(14)式を満たす βl の値を使うことで、2-1の実験の金属梁のような、一端固定で他端自由の梁のたわみの理論解を求めることができた。図6にたわみの理論解を示す。

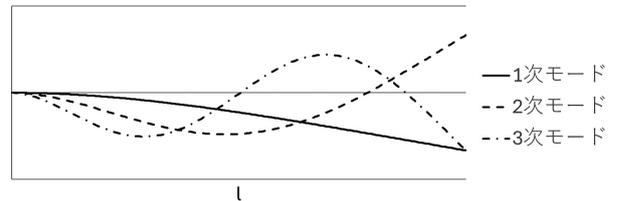


図6 $W_n(x)$ の理論解

2次モードの節の位置も求められた。「節」は、2次モード以上の振動で生じる、たわみが零になる点のことを表す。節に対して、振動でたわみが大きくなる部分は「腹」といわれる。計算の結果、節の位置は根本から先端までの長さ ($x = l$) に対して約78.2%となることが分かった。たわみと同様に、固有振動数の理論解も求められた。 n 次モードの固有振動数 f_n は、角固有振動数を ω_n , E をヤング率, I を断面2次モーメント, ρ を梁の密度とすると(9)式より(18)式で表される。

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\beta_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (18)$$

金属梁の固有振動数の計算には表2の値を用いた。

表2 金属（リン青銅）梁の諸元

梁の根本から先端までの長さ(mm)	220
梁の幅(mm)	38
梁の厚さ(mm)	1
ヤング率(GPa)	110 ⁽⁷⁾
密度(kg/m ³)	8800 ⁽⁷⁾
断面2次モーメント(m ⁴)	3.167 × 10 ⁻¹²

固有振動数 f_n の計算結果とその計算に用いた $\beta_n l$ を表3に示す。

表3 固有振動数の理論解

モード	$\beta_n l$	f_n (Hz)
1次モード	1.875	11.800
2次モード	4.694	73.952
3次モード	7.855	207.088

2-3 固有振動数とモード形状のシミュレーション

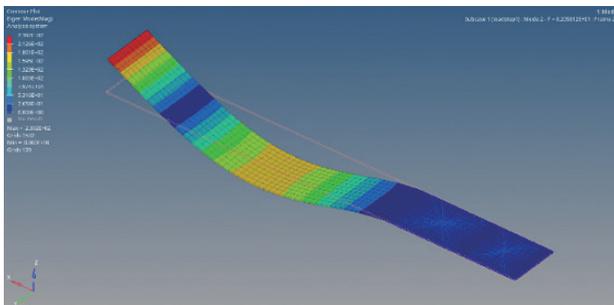


図7 シミュレーションの2次モード

2-1の金属梁のモードごとの固有振動数とモード形状を Altair HyperWorks⁽⁶⁾によるシミュレーションで求めた。シミュレーションには、表2の物性値と図8の

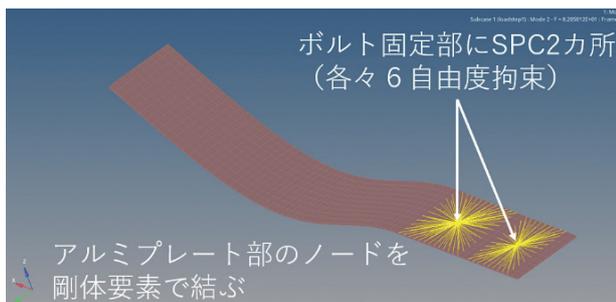


図8 金属梁のシミュレーションの支持条件

支持条件を設定し、解析の種類（Load Steps）には Normal Modes を使用した。

シミュレーションで求めた固有振動数を表4に示す。

表4 シミュレーションの固有振動数

モード	シミュレーション(Hz)
1次	13.112
2次	82.058
3次	140.679
4次	230.282

2-4 追加実験

学生実験とは別に、学生実験と同じく表1の実験機器を使って、金属梁の2次モードの固有振動数を実験で調べた。その結果、2次モードの固有振動数は73.0Hzと分かった。同実験を行った際は、2-2の理論の検討が不十分だったため、シミュレーションで求めた2次モードの固有振動数を加振器の振動数として設定した後、それに近い範囲で0.1Hzずつ振動数を変化させた。ファンクションジェネレータで73.0Hzの振動数で加振するように設定した際に、目視で金属梁の先端の振幅が最大になるのを確認したので、73.0Hzを2次モードの共振と見なした。金属梁の2次モードの共振の様子を図9に示す。

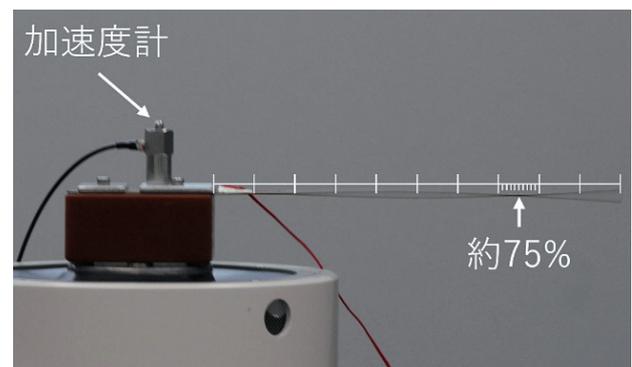


図9 2次モードの共振 (73.0Hz)

図9に示すように、2次モードの振動では節を約75%の位置に確認できた。2-2の理論から求めた1次モードから3次モードまでの固有振動数の理論解に対して、追加実験の固有振動数と、シミュレーションとの比較結果を表5に示す。

追加実験で確認した固有振動数は、理論解に近い結果となった。高次のモードでは梁の振幅が小さく、3次以上のモードを実験で確認することはできなかった。

シミュレーションの3行目の140.679Hzは、ねじりを伴うモードとなっている。

表5 固有振動数の比較

梁理論(Hz)		実験(Hz)	HyperWorks(Hz)
1次モード	11.800	11.6	13.112
2次モード	73.952	73.0	82.058
*	*		140.679
3次モード	207.088		230.282

* 2-2の理論では奥行を考えていないのでねじりを伴うモードは出てこない

本実験の中で、加振器ヘッドに加速度計を取り付け加速度の計測を行った(図9に写っているのが加速度計)。加速度計は、昭和測器の圧電型加速度検出器2300Aを使用した。ファンクションジェネレータを使って、加振器の振動数を4Hz、11.6Hz、20Hzに設定した時の加速度を計測した。それぞれの振動数での加速度の計測結果から1秒間の波形を取り出し、図10にまとめた。図10の計測は、図9と異なり、金属梁は加振器から取り外された状態で行った。

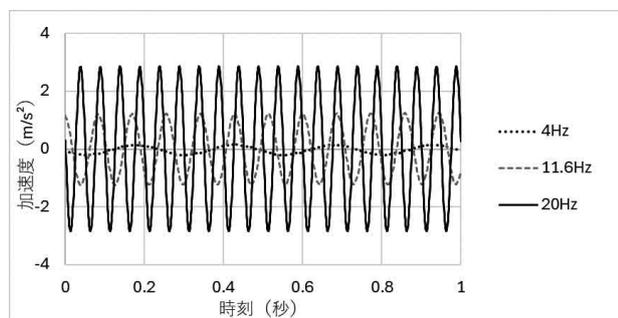


図10 加速度の計測結果

図10より、横軸の0.0秒から1.0秒までのそれぞれの波の数を数えると、ファンクションジェネレータで設定した4Hz、11.6Hz、20Hzのsin波形で加振されていることを確認した。

3. 中心支持された平板の共振

加振器に平板を取り付け振動させ、塩等の粒子を振ると、加振器の振動数を変えることで、平板上の粒子が節に集まることでできる模様に変化していく様子が観察できる。HyperWorksによる振動のシミュレーションを2-3と同様にアクリル平板に対しても実施し、モード

ごとに平板の変形を計算した。シミュレーションでは、図11に示すとおり、板の中心のノードを6自由度固定し、表6の物性値を使用した。

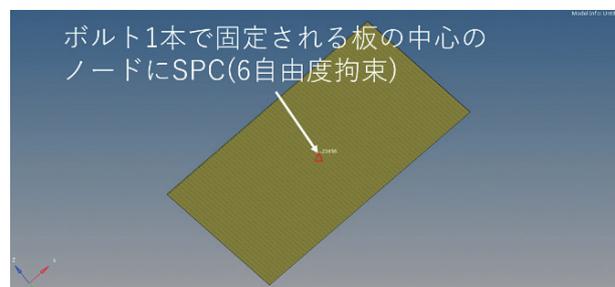


図11 平板のシミュレーションの支持条件

表6 平板のシミュレーションに使用した物性値

ヤング率(MPa)	3000 ⁽⁸⁾
密度(kg/m ³)	1190 ⁽⁸⁾
ポアソン比	0.35 ⁽⁸⁾

図12のように、赤色や橙色の部分に変形の度合いが大きい腹といわれる部分は粒子を払い除けるため、青色の節といわれる振動しない部分に塩の粒子が集まりモード形状を示す模様を得られる。

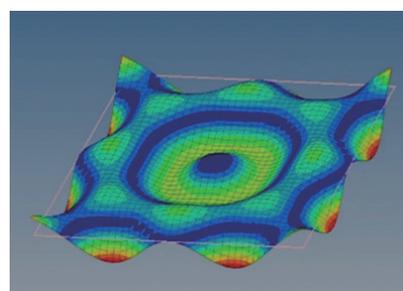


図12 シミュレーションの29次のモード形状

アクリル平板に対する加振周波数を変えることで、塩の模様に変化していく実験を2025年度のオープンキャンパスで展示した。この実験には、長さ幅が350mm、厚さ1mmのアクリル板を使用した。実験は、図13に示すとおり、アクリル板が加振器に干渉しないように、加振器とアクリル平板の間に円形の樹脂ブロックを挟んでボルトで固定した。

その結果、図14に示すように、加振器の加振周波数を変化させると塩の模様に変化することを確認できた。本報告執筆時点で、2025/03/11附属高校、3/29オープンキャンパスの2回で実施した。この2回において見学した高校生から「周波数変えるだけで模様が変わるのはなぜ」

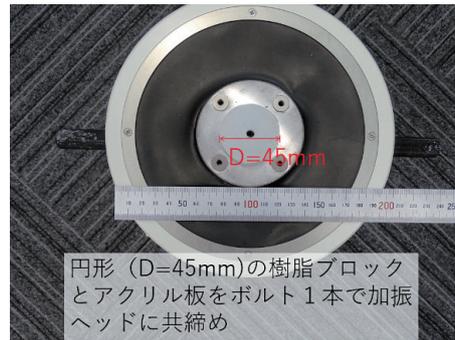


図13 アクリル平板の支持条件

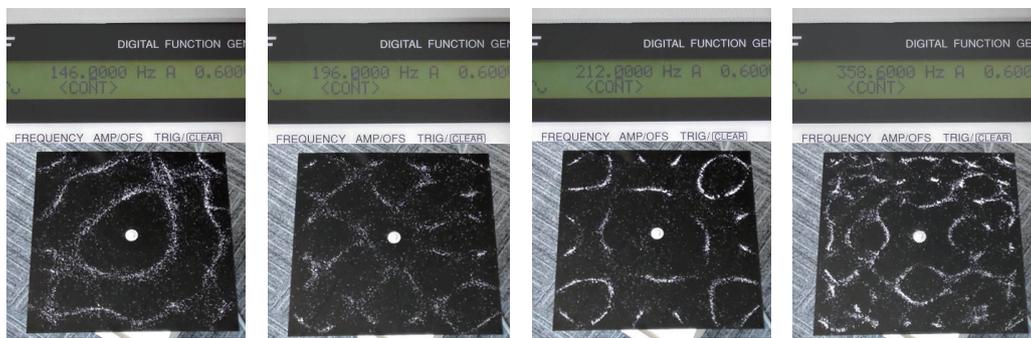


図14 実験で見られた平板の代表的な振動モード事例

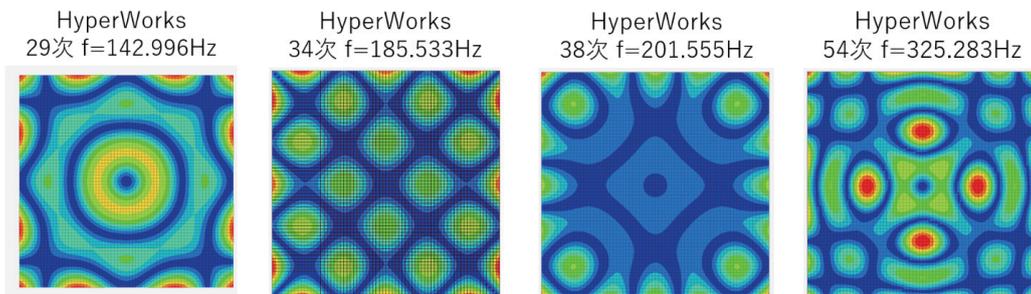


図15 図14に対応するシミュレーションの振動モード事例

と質問があり、関心を惹いていることが確認された（その日、全体を通じて具体的な質問として出たのは本質問のみ）。

実験の平板の様子を撮影した動画と HyperWorks によるシミュレーションの結果を見比べて、実験とシミュレーションで同じ模様があるかどうかを調べた。その結果、シミュレーションの29次、34次、38次、54次のモードに、実験で見られた模様と同じような模様が確認できた。その代表的な事例を表7に示す。固有振動数の誤差を計算すると、2%から10%となった。

図14に示す、実験で見られた代表的な振動モード事例に対応するシミュレーションの振動モードとして、29

次、34次、38次、54次のモード形状を図15に示す。図14と図15で模様がおおむね一致していることがわかる。

表7 アクリル平板の代表的な振動モードの固有振動数

実験 (Hz)	シミュレーション(Hz)	誤差(%)
146.0	モード29 142.996	2.1
196.0	モード34 185.533	5.6
212.0	モード38 201.555	5.2
358.6	モード54 325.283	10.2

4. まとめ

片持ち梁の共振について、学生実験では、学生が片持ち梁の1次モード共振を観察した。学生実験とは別に2次モード共振まで確認することができた。片持ち梁の理論およびシミュレーションから、1次から3次モードまでの梁のモード形状と固有振動数を示した。

平板の共振実験では、塩を振ることで数百 Hz の高次の振動モードを目視で確認できた。塩等の細かい粒子は、平板の高次の振動モードの確認に役立つことを改めて認識した。同実験のオープンキャンパス展示では、高校生からの質問もあり、関心を惹いていることが確認された。

今後の加振器を使った実験としては、樹脂板（塩ビかアクリル）の片持ち梁の2次モードの固有振動数を観察できるような条件設定を検討中である。

参考文献

- (1) 改訂版基礎物理, 数研出版など
- (2) 日本建築学会, 阪神・淡路大震災を振り返り, 来

る大地震に備えるー建築振動研究に課せられたものー2011年3月7日, <http://news-sv.ajj.or.jp/ko uzou/s46/FILES/symposium20110307.pdf>

- (3) エミック株式会社, 513シリーズ98N~196N, <https://www.emic-net.co.jp/download/file/pdf/CL-142-14-J.pdf> (参照日2025年8月29日).
- (4) 株式会社エヌエフ回路設計ブロック, デジタルファンクションジェネレータ DF1906, <https://www.nfcorp.co.jp/pro/mi/sig/df1906/> (参照日2025年8月29日).
- (5) Rao, S.S., Vibration of Continuous Systems, Wiley, p. 335.
- (6) Altair Engineering Inc, Altair HyperWorks, <http://altairjp.co.jp/altair-hyperworks> (参照日2025年8月26日).
- (7) JX 金属株式会社, ハイパーリン青銅・リン青銅成分・特性一覧, <https://www.jx-nmm.com/products/alloy/copper/05pb/> (参照日2025年6月12日).
- (8) 伝熱解析材料物性研究室, PMMA アクリル樹脂 (Acrylic resin), <http://materiallab.seesaa.net/article/155240823.html> (参照日2025年6月12日).

(2025年6月16日受理)

